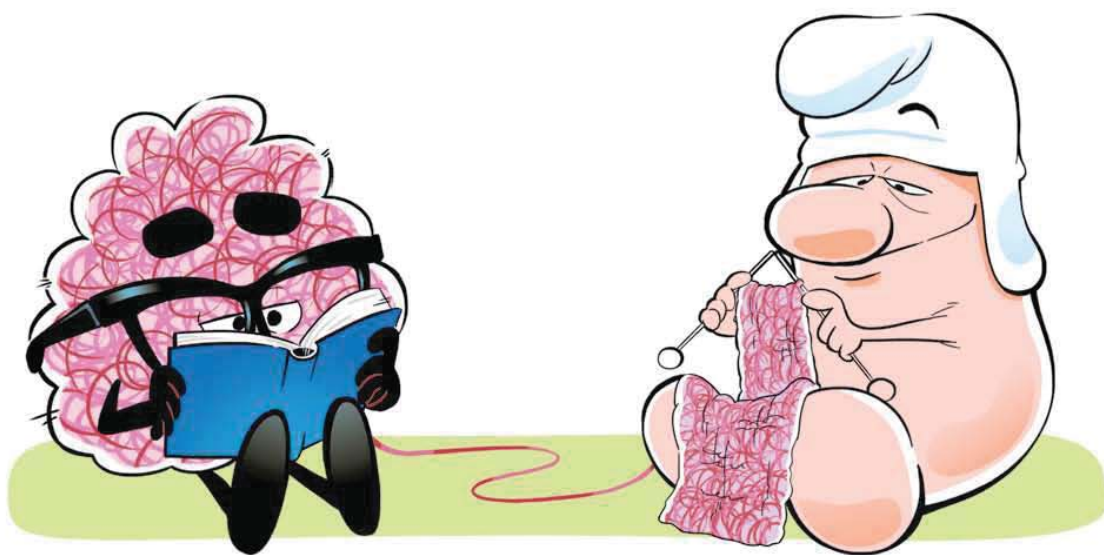


فصل اول

مجموعه‌ها





درس اول: معرفی مجموعه



تمرین

درست یا نادرست

الف) ☒ درست ☐ نادرست ب) ☒ درست ☐ نادرست پ) ☐ درست ☒ نادرست ت) ☒ درست ☐ نادرست ث) ☐ درست ☒ نادرست

الف) مجموعه ☒ کامل کنید ☐ ب) ۷ ☐ پ) ۳ ☐ ت) تهی ☐

پرسش‌های دو گزینه‌ای

الف) گزینه (۲) ☐ ب) گزینه (۲) ☐ پ) گزینه (۱) ☐ ت) گزینه (۱) ☐ ث) گزینه (۱) ☐

تمرین‌های تشریحی

- ۱) الف) بله. $\{۷, ۸, ۹\}$. ☐
 ب) خیر. ☐
 ث) خیر. ☐
 ج) بله. $\left\{\frac{۱۹}{۳}\right\}$. ☐
 ۲) خیر. ☐
 ۳) الف) $\{-۴, -۳, -۲, \dots, ۶, ۷\}$ که ۱۲ عضو دارد. ☐
 ب) $\{۲\}$. ☐
 ۴) الف) $\{۱, ۳, ۵, ۷, \dots\}$. ☐
 ب) $\{۷, ۱۲, ۱۷, ۲۲, \dots\}$. ☐
 ب) خیر. ☐
 ت) بله. $\emptyset$. ☐
 ج) بله. $\left\{\frac{۱}{۶}, \frac{۲}{۵}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۳}, \frac{۵}{۲}, \frac{۶}{۱}\right\}$. ☐
 ج) بله. $\{۵, ۱۰, ۱۵, \dots\}$. ☐
 ب) $\{۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹\}$ که ۴ عضو دارد. ☐
 ت) $\{۱۶, ۲۵, ۳۶, ۴۹, ۶۴, ۸۱\}$. ☐

۵) $\{3, 5\}$, $\{3, 5, \{3\}\}$ و $\{-5, -3, 3, 5\}$

۶) مجموعه اعداد اول و زوج، مجموعه اعداد طبیعی بین ۱ و ۳، مجموعه جوابهای معادله $x-2=0$

۷)

الف) مجموعه اعداد اول و فرد یک رقمی

ب) مجموعه مضربهای طبیعی عدد ۲ که از ۹ کوچکترند.

پ) مجموعه مضربهای صحیح عدد ۲ که بین ۵- و ۵ هستند.

ت) مجموعه مضربهای صحیح عدد ۳ که بین ۷- و ۱۰ هستند.

ث) مجموعه مقسومعلیههای مثبت عدد ۱۲

ج) مجموعه مضربهای طبیعی عدد ۳

چ) مجموعه مضربهای طبیعی و دورقمی عدد ۲

ح) مجموعه اعداد طبیعی ای که مکعب کاملاند.

۸)

الف) ☒

ب) ☒

پ) ☒

۹)

الف) ☒

ب) ☒

پ) ☒

ت) ☒

۱۰)

پ) $\{1, 2\} \in A$

ب) $2 \in A$

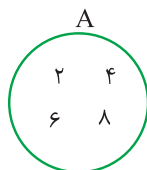
الف) $\{1\} \notin A$

ج) $\{3, \{4\}\} \notin A$

ث) $\{1, 2, 3\} \notin A$

ت) $4 \notin A$

۱۱)



۱۲)

الف) $A = \{-4, -2, -1, 3, 14, 15\}$, $B = \{-12, -4, -1, 7, 15, 16\}$

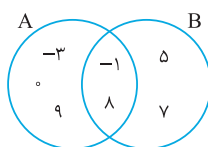
ت) -4

پ) -12

ب) 15

۱۳)

الف)



پ) $\{5, 7\}$

ب) $\{-1, 8\}$

۱۴)

• مجموعه اسبهای بالدار.

• مجموعه اعداد اول زوج دورقمی.

• مجموعه جوابهای صحیح معادله $3x-5=-7$.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- ۱ گزینه (۳): چون عددهای اول بین ۱۰ و ۲۰ برابر ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹ هستند، پس عبارت «مجموعه سه عدد اول بین ۱۰ و ۲۰» مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند.
- ۲ گزینه (۳): توجه کنید که $\sqrt{۱۳} \approx ۳/۶$ و $\sqrt{۹۸} \approx ۹/۹$. بنابراین مجموعه موردنظر $\{۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ است، که شش عضو دارد.
- ۳ گزینه (۱): معلوم است که ۱ عضو مجموعه موردنظر است ولی ۲، ۳ و ۴ عضو مجموعه موردنظر نیستند.
- ۴ گزینه (۳): معلوم است که ۳ عضو مجموعه موردنظر نیست.
- ۵ گزینه (۴): چون $\{۲, ۶\}$ عضو مجموعه A است، پس $\{۲, ۶\} \notin A$ درست نیست.
- ۶ گزینه (۳): توجه کنید که $\{۱, ۲\}$ همان $\{۲, ۱\}$ است. بنابراین مجموعه موردنظر $\{\emptyset, \{۱\}, \{۱, ۲\}, \{۲\}\}$ است که چهار عضو دارد.
- ۷ گزینه (۲): توجه کنید که مجموعه $\{۱, ۲\}$ همان مجموعه $\{۲, ۱\}$ است و مجموعه $\emptyset$ همان مجموعه $\{\}$ است. بنابراین عضوهای $\{۱\}$ و $\{\emptyset\}$ از مجموعه اول، عضو مجموعه دوم نیستند.
- ۸ گزینه (۱): معلوم است که باید $x=۱$ یا $x=۲$. اگر $x=۱$ ، مجموعه موردنظر می‌شود $\{۱, ۲\}$ و اگر $x=۲$ ، مجموعه موردنظر می‌شود $\{۱, ۲, ۵\}$ که سه عضو دارد. بنابراین $x=۱$.
- ۹ گزینه (۳): چون مجموع زاویه‌های مثلث برابر ۱۸۰° است، پس هر مثلث حداکثر یک زاویه باز می‌تواند داشته باشد. بنابراین مجموعه مثلث‌هایی که دو زاویه باز دارند، تهی است.
- ۱۰ گزینه (۲): ۱۱ عددی اول و دورقمی است. بنابراین مجموعه عددهای اول دورقمی تهی نیست. بقیه گزینه‌ها مجموعه‌هایی تهی‌اند.

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها



تمرین

درست یا نادرست

(الف) ✓ (ب) ✗ (پ) ✓ (ت) ✗ (ث) ✗

کامل کنید

(الف) $A=B$ (ب) نهی (پ) ۳ (ت) مجموعه A زیر مجموعه B نیست. (ث) زوج

پرسش‌های دو گزینه‌ای

(الف) گزینه (۱) (ب) گزینه (۱) (پ) گزینه (۱) (ت) گزینه (۲) (ث) گزینه (۱)

تمرین‌های تشریحی

(۱) بله. چون هر دو مجموعه A و B برابر با مجموعه تهی هستند.

(۲) واضح است که $-\frac{1}{4} = -\frac{0}{5}$ عضو هر دو مجموعه است. چون اعضای دو مجموعه برابرند، پس $x=7$ و $y=\sqrt{9}=3$.

(۳) (الف) خیر، $a \in A$ (ب) بله (پ) بله (ت) خیر، $\{a, b\} \in A$.
(ث) بله، چون a و c عضو مجموعه A هستند، پس $\{a, c\} \subseteq A$ (ج) بله، چون $\{a\} \in A$ ، پس $\{\{a\}\} \subseteq A$.

(۴) (الف) $\{a\} \subseteq A$ (ب) $\{a, \{b\}\} \not\subseteq A$ (پ) $\{c\} \not\subseteq A$ (ت) $\{\{d, e\}\} \subseteq A$

(۵) توجه کنید که

$$A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}, \quad B = \{4, 8, 12, \dots\}$$

پس

$$B \subseteq A, \quad A \not\subseteq B$$



۶) $A = \{a, b\}$, $B = \{\{a, b\}\}$

۷) چون $A \subseteq B$ ، پس تمام اعضای مجموعه A باید عضو مجموعه B باشند. فقط عضو $4-k$ در مجموعه A را باید بررسی کنیم که چهار حالت دارد:

۱) $4-k=1 \Rightarrow k=3$, ۲) $4-k=2 \Rightarrow k=2$
 ۳) $4-k=3 \Rightarrow k=1$, ۴) $4-k=4 \Rightarrow k=0$

۸)

$\{a, b, c\}$: سه‌عضوی , $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$: دو‌عضوی , $\{a\}, \{b\}, \{c\}$: تک‌عضوی , $\emptyset$: صفر‌عضوی

۹)

دو‌عضوی: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$

سه‌عضوی: $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$

۱۰)

الف) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 7\}$ ب) $B = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$

پ) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq -3\}$ ت) $D = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$

ث) $E = \{4k-5 \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 6\}$
 یا $E = \{4k-1 \mid k \in \mathbb{W}, k \leq 5\}$
 چون فاصله اعداد ۴ تا است

ج) $F = \{-\frac{1}{x^2} \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ د) $G = \{k^3 - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$

ه) $H = \{\frac{a}{\sqrt{a+3}} \mid a \in \mathbb{N}, 2 \leq a \leq 10\}$ و) $I = \{(-1)^{k+1}k \mid k \in \mathbb{N}\}$

د)

ابتدا توجه کنید که: $J = \{\frac{2}{x} \mid x \in \mathbb{N}\}$, پس $J = \{2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \dots\} = \{\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \dots\}$

۱۱)

الف) $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, 0 < x \leq 2\} = \{1, 4\}$

ب) $B = \{2x-7 \mid x \in \mathbb{N}, \frac{12}{x} \in \mathbb{Z}\} = \{-5, -3, -1, 1, 5, 17\}$

پ) $C = \{\frac{2k}{v} \mid k \in \mathbb{Z}, k \leq 3\} = \{\frac{2}{v}, \frac{4}{v}, \frac{6}{v}, \dots\}$

ت) $D = \{mn \mid m, n \in \{1, 2, 3\}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$

ث) $E = \{(-1)^y y^2 \mid y \in \mathbb{N}\} = \{-1, 4, -9, 16, \dots\}$

ج) $F = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (x+1)(x+9) \dots (x-9)(x-1) = 0\} = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

د) $G = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2-1}{x^2+1}, -2 \leq x < 2\} = \{\frac{3}{5}, 0, -1\}$

ه) $H = \{3n\sqrt{2} \mid n \in \mathbb{W}\} = \{0, 3\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 9\sqrt{2}, \dots\}$

۱۲) توجه کنید که مقسوم‌علیه‌های صحیح ۱۵ عبارتند از: $-۱۵, -۵, -۳, -۱, ۱, ۳, ۵, ۱۵$

$$\{x \mid x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, ab = 15\} = \left\{ \frac{15}{1}, \frac{1}{15}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3} \right\}$$

۱۳)

$$A = \{\sqrt{x} \mid x \in \mathbb{N}, 10 \leq x \leq 100\} = \{\sqrt{10}, \sqrt{11}, \dots, \sqrt{100}\}$$

اکنون چون اعداد ۱۶، ۲۵، ۳۶، ۴۹، ۶۴، ۸۱ و ۱۰۰ مربع کامل‌اند، بنابراین مجموعه A ، ۷ عضو طبیعی دارد.

تمرین‌های ویژه

۱) ۴ زیرمجموعه

$\{a, b, c, d\}$: چهارعضوی $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}$: سه‌عضوی $\{a, b\}$: دوعضوی

۲) چون یک مجموعه دو عضوی با یک مجموعه یک عضوی برابر است، پس عضوهای مجموعه دو عضوی با یکدیگر برابرند:

$$x - 5 = 5 - x \text{، یعنی } x = 5 \text{ پس}$$

$$2y + 2 = x - 5 = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$\text{در نتیجه } y - x = -1 - 5 = -6$$

۳) چون عدد ۵ عضو مجموعه سمت چپ است، پس عضو مجموعه سمت راست نیز هست. بنابراین $5 = 2x + 3$ ، یعنی $x = 1$.

در نتیجه، تساوی داده شده در صورت مسئله می‌شود $\{5, -1\} = \{-1, 2y - 3, 5\}$. پس برای $2y - 3$ دو حالت پیش می‌آید:

$$2y - 3 = -1 \Rightarrow y = 1, \quad 2y - 3 = 5 \Rightarrow y = 4$$

۴) خیر. فرض کنید $A = C = \emptyset$ و $B = \{\emptyset\}$.

۵)

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

زیرمجموعه‌های سه‌عضوی A : $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\},$
 $\{1, 4, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 6\},$
 $\{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{3, 5, 6\}, \{4, 5, 6\}$

۶)

الف) $A = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$

ب) $B = \{-3, -1\}$



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ گزینه (۱): ابتدا توجه کنید که چون $A=C$ ، عددهای a و b به ترتیبی عددهای ۶ و ۷ هستند. بنابراین در هر صورت $ab=42$.

همین‌طور از $A=B$ نتیجه می‌شود $c=5$. بنابراین $ab+c=47$.

۲ گزینه (۱): توجه کنید که چون x عضو مجموعه سمت چپ است، پس باید عضو مجموعه سمت راست نیز باشد. بنابراین دو حالت پیش می‌آید.

حالت اول

$$\begin{cases} x=2x-5 \\ y-1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$$

حالت دوم

$$\begin{cases} x=5 \\ y-1=2x-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$$

در هر دو حالت $x+y=11$.

۳ گزینه (۳): توجه کنید که

$$\{a, b\} \in A \Rightarrow \{\{a, b\}\} \subseteq A$$

۴ گزینه (۳)

۵ گزینه (۳): توجه کنید که $\{c\} \in A$ ، ولی $\{c\} \not\subseteq A$.

۶ گزینه (۳): توجه کنید که $\{3, 4\} \in A$.

۷ گزینه (۴): توجه کنید که $\{b\} \in A$ و

$$b \in A \Rightarrow \{b\} \subseteq A$$

۸ گزینه (۳): چون $A = \{-5, -4, -3, 3, 4, 5\}$ ، پس $n(A)=6$.

۹ گزینه (۱): چون $A = \{-7, -8, -9, \dots\}$ ، پس -7 بزرگ‌ترین عضو A است.

۱۰ گزینه (۲): چون $A = \{21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48\}$ ، پس تعداد اعضای A برابر ۱۰ است.

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها



تمرین

درست یا نادرست ☒ ☐

الف) ☒ ب) ☐ پ) ☒ ت) ☒ ث) ☐

الف) B ☒ ب) B زیرمجموعه A ☐ پ) $\mathbb{N}$ ☐ ت) تهی ☐ ث) A ☐

پرسش‌های دو گزینه‌ای

الف) گزینه (۲) ☐ ب) گزینه (۱) ☐ پ) گزینه (۲) ☐

ت) گزینه (۲): حداکثر $n(A \cup B)$ به شرطی است که A و B اشتراک نداشته باشند.

ث) گزینه (۲): حداکثر $n(A - B)$ به شرطی است که A و B اشتراک نداشته باشند.

تمرین‌های تشریحی

۱) ابتدا توجه کنید که $A = \{-3, -2, \dots, 3, 4\}$ و $B = \{1, 2\}$. بنابرین $A \cap B = \{1, 2\}$.

$A = \{1, 2, \dots, 9\}$, $B = \{1, 2\} \Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

الف) $A \cap B = \{2, 7\}$

ب) $B \cap C = \{4, 7\}$

پ) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

ت) $B \cup C = \{2, 4, 5, 7, 8, 9\}$

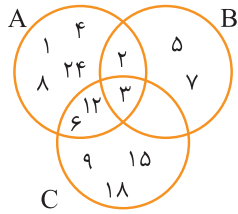
ث) $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$

ج) $(A \cap B) \cup C = \{2, 4, 5, 7, 9\}$



۴

الف



$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

$$(A \cap B) \cap C = \{3\} \quad \text{ب}$$

۵ ابتدا توجه کنید که

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A \cap C = \{4, 5, 6\}$$

$$(A \cup B) \cap (A \cap C) = \{4, 5, 6\} \quad \text{بنابراین}$$

۶

$$A \cap B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < 13\}, \quad A \cup B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -6 \leq x < 17\}$$

$$A \cap (B \cup C) \quad \text{۷}$$

۸

$$A - B = \{4, 7, 8, 9\} \quad \text{الف} \quad B - A = \{1, 6\} \quad \text{ب}$$

$$A - C = \{2, 7, 8, 9\} \quad \text{پ}$$

$$C - A = \{5, 6\} \quad \text{ت}$$

$$A - B = \emptyset \quad \text{چون } A \subseteq B \quad \text{بنابراین} \quad \text{۹}$$

۱۰

$$\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{0, -1, -2, \dots\} \quad \text{الف}$$

$$\mathbb{N} - \mathbb{Z} = \emptyset \quad \text{ب}$$

$$\mathbb{N} - \mathbb{W} = \emptyset \quad \text{پ}$$

$$\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\} \quad \text{ت}$$

$$\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{-1, -2, -3, \dots\} \quad \text{ث}$$

$$\mathbb{W} - \mathbb{Z} = \emptyset \quad \text{ج}$$

$$\mathbb{N} \cap \mathbb{W} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{۱۱}$$

$$\mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad \text{۱۰}$$

۱۱

$$B \cap C = \{6\} \quad \text{بنابراین} \quad \text{الف}$$

$$A - (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$$

$$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\} \quad \text{بنابراین} \quad \text{ب}$$

$$A - (B \cup C) = \{5, 7\}$$

$$\text{ابتدا توجه کنید که} \quad \text{۱۲}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{2, 5, 10, 17, 26\}$$

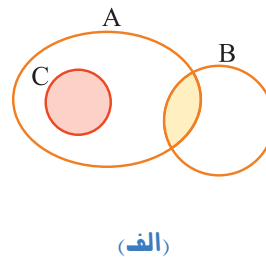
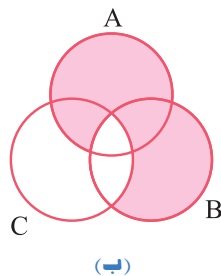
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 17, 26\} \quad \text{الف}$$

$$A \cap B = \{2, 5\} \quad \text{ب}$$

$$A - B = \{1, 3, 4\} \quad \text{پ}$$

$$B - A = \{10, 17, 26\} \quad \text{ت}$$

۱۳



پ) $B - (A \cup C)$

۱۴

الف) $n(A) = 4$

پ) ابتدا توجه کنید که $B = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ پس $n(B) = 7$.

پ) $n(C) = 1$ دقت کنید که مجموعه C برابر مجموعه تهی نیست.

ت) توجه کنید که $D = \emptyset$ پس $n(D) = 0$.

۱۵) ابتدا توجه کنید که $B = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3\}$ پس $A \cup B = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 9\}$ بنابراین $n(A \cup B) = 8$.

۱۶) ابتدا توجه کنید که $A = \{-1, 0, 1, \dots, 6\}$ و $B = \{-6, -5, \dots, 1\}$ پس

$$\begin{cases} A \cup B = \{-6, -5, \dots, 6\} \\ A \cap B = \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

بنابراین $n(A \cup B) + n(A \cap B) = 13 + 3 = 16$.

۱۷

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad B = \{-2, -1, 1, 2\}$$

۱۸

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad B = \{-1, 0, 1\}$$

۱۹

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{-1, 0, 1, 2\}$$

تمرین‌های ویژه

۱) از فرض‌های مسئله نتیجه می‌شود که ۶ و ۷ تنها عضو مجموعه B هستند. ضمناً اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ عضو هر دو مجموعه A و B هستند. بنابراین یک مثال برای مجموعه‌های A و B به این صورت است:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

۲

الف) چون همه اعضای دو مجموعه سمت چپ تساوی باید عضو مجموعه سمت راست تساوی باشند، پس ۱۳ باید عضو مجموعه سمت راست باشد. بنابراین $y = 13$. اکنون توجه کنید که X باید عضو مجموعه سمت راست باشد، پس $x \in \{-5, 5, 2, 11, 13\}$.

یعنی عدد X هر یک از این پنج عدد می‌تواند باشد.

ب) چون عدد ۴ در هر دو مجموعه سمت راست تساوی وجود دارد، پس $x = 4$. از طرف دیگر اعداد ۷ و ۶ نباید در هر دو مجموعه

سمت راست باشند. ضمناً $x - 3 = 1$ و ۱ عضو مشترک دو مجموعه است. در نتیجه $\frac{y}{x} = 1$ ، یعنی $y = 2$.



۳ الف) ابتدا توجه کنید که

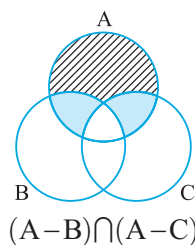
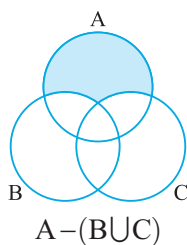
$$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}, \quad A - B = \{3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}, \quad A - C = \{1, 2, 5, 6, 9, 10\}$$

بنابراین

$$\begin{cases} A - (B \cup C) = \{5, 6, 9, 10\} \\ (A - B) \cap (A - C) = \{5, 6, 9, 10\} \end{cases}$$

پس رابطه موردنظر برقرار است.

تذکره: درستی این رابطه را با نمودار و هم می‌توان بررسی کرد.

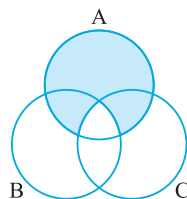


ب) ابتدا توجه کنید که $B \cap C = \{7\}$. بنابراین

$$\begin{cases} A - (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\} \\ (A - B) \cup (A - C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\} \end{cases}$$

پس رابطه موردنظر برقرار است.

تذکره: با کمک نمودار و زیر، ناحیه سایه‌دار برابر با دو طرف رابطه موردنظر است.



۴

الف) $(A - B) \cup (C - B)$ یا $(A \cup C) - B$

ب) $(A \cap B) \cup (C \cap B)$ یا $(A \cup C) \cap B$

پ) $(A \cup B) - (B - C)$ یا $(A - B) \cup (B \cap C)$

۱ گزینه (۲): ابتدا توجه کنید که اشتراک هر مجموعه‌ای با مجموعه تهی برابر است با مجموعه تهی و اجتماع هر مجموعه‌ای با مجموعه تهی برابر است با خود آن مجموعه، به عبارت دیگر، $A \cup \emptyset = A$ و $A \cap \emptyset = \emptyset$. بنابراین

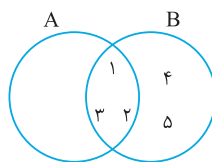
$$(A \cap B) \cup (A \cap \emptyset) = (A \cap B) \cup \emptyset = A \cap B$$

۲ گزینه (۳): ابتدا توجه کنید که

$$A = \{2, 4, 6, \dots\}, \quad B = \{3, 6, 9, \dots\}$$

بنابراین مجموعه $A \cap B$ شامل اعداد طبیعی زوج و مضرب ۳ است که همان اعداد طبیعی مضرب ۶ می‌شود، یعنی $A \cap B = \{6, 12, \dots\}$. پس کوچک‌ترین عضو مجموعه $A \cap B$ برابر است با ۶.

۳ گزینه (۴): چون $B \subseteq A \cup B$ ، پس مجموعه B حداکثر ۵ عضو می‌تواند داشته باشد. در نمودار ون زیر، شرایط مسئله برقرار است.



۴ گزینه (۱): ابتدا توجه کنید که $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ ، بنابراین $A - (A \cap B) = \{2, 4, 6\}$ ، پس مجموعه موردنظر ۳ عضو دارد.

۵ گزینه (۳): توجه کنید که

$$A \cup B = \{\nabla, \emptyset, \{\emptyset\}, \Delta, ?, \{\emptyset, \nabla\}, \{?\}\} \Rightarrow n(A \cup B) = 7$$

۶ گزینه (۱): ابتدا توجه کنید که

$$A = \{16, 20, 24, \dots, 64\}, \quad B = \{21, 24, 27, \dots, 75\}$$

مجموعه $A \cap B$ شامل اعداد مضرب ۱۲ هست که بزرگ‌تر از ۱۸ و کوچک‌تر از یا مساوی با ۶۷ هستند. پس $A \cap B = \{24, 36, 48, 60\} \Rightarrow n(A \cap B) = 4$

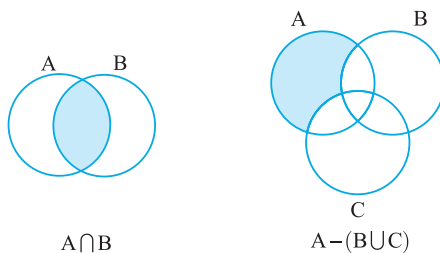
۷ گزینه (۳):

$$(A - C) \cap B \quad \text{یا} \quad (B - C) \cap A \quad \text{یا} \quad (A \cap B) - C$$

۸ گزینه (۴):

$$(A \cap B) - (A \cap C) \quad \text{یا} \quad A \cap (B - C) \quad \text{یا} \quad (A \cap B) - C$$

۹ گزینه (۴): ناحیه سایه‌دار موردنظر، اجتماع ناحیه‌های سایه‌دار زیر است:



۱۰ گزینه (۱): ناحیه سایه‌دار شامل اعضای مجموعه $A \cap B$ است به جز اعضای C که برابر است با $(A \cap B) - C$.



درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال



تمرین

درست یا نادرست

(الف) ✗

(ب) ✓

(پ) ✓

(ت) ✓

(ث) ✗

(الف) ✗ : به عنوان مثال، در پرتاب یک تاس فرض کنید A پیشامد آمدن عددی کمتر از ۶ باشد و B پیشامد آمدن عدد ۶ باشد.

واضح است که $A \cap B = \emptyset$ ، $P(A) = \frac{5}{6}$ و $P(B) = \frac{1}{6}$.

کامل کنید



(ت) هم‌شانس

(پ) ۱

(ب) صفر

(الف) پیشامد

(ث) همهٔ حالت‌های ممکن در این آزمایش را در جدول زیر مشخص می‌کنیم:

تاس

		۱	۲	۳	۴	۵	۶
سکه	رو	(ر, ۱)	(ر, ۲)	(ر, ۳)	(ر, ۴)	(ر, ۵)	(ر, ۶)
	پشت	(پ, ۱)	(پ, ۲)	(پ, ۳)	(پ, ۴)	(پ, ۵)	(پ, ۶)

بنابراین در این آزمایش $n(S) = ۱۲$. همچنین، اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه $A = \{(پ, ۱), (پ, ۳), (پ, ۵)\}$ ، پس

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴} \text{ در نتیجه، } n(A) = ۳$$

پرسش‌های دو گزینه‌ای

(الف) گزینهٔ (۱)

(ب) گزینهٔ (۲)

(پ) گزینهٔ (۲):

- $\left\{ \begin{array}{l} (ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳) \\ (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶) \\ (پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳) \\ (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶) \end{array} \right.$

ت. گزینه (۲)

$$S = \{(ر, ر), (پ, ر), (ر, پ), (پ, پ)\}, A = \{(ر, ر), (پ, پ)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ث. گزینه (۲)

		تاس دوم					
		۱	۲	۳	۴	۵	۶
تاس اول	۱	(۱, ۱)	(۱, ۲)	(۱, ۳)	(۱, ۴)	(۱, ۵)	(۱, ۶)
	۲	(۲, ۱)	(۲, ۲)	(۲, ۳)	(۲, ۴)	(۲, ۵)	(۲, ۶)
	۳	(۳, ۱)	(۳, ۲)	(۳, ۳)	(۳, ۴)	(۳, ۵)	(۳, ۶)
	۴	(۴, ۱)	(۴, ۲)	(۴, ۳)	(۴, ۴)	(۴, ۵)	(۴, ۶)
	۵	(۵, ۱)	(۵, ۲)	(۵, ۳)	(۵, ۴)	(۵, ۵)	(۵, ۶)
	۶	(۶, ۱)	(۶, ۲)	(۶, ۳)	(۶, ۴)	(۶, ۵)	(۶, ۶)

$$n(S) = 36, A = S - \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

تمرین‌های تشریحی

(۱)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow \frac{1}{7} = \frac{n(A)}{42} \Rightarrow n(A) = \frac{42}{7} = 6$$

(۲) توجه کنید که $S = \{1, 2, 3, \dots, 29\}$. اگر A پیشامد موردنظر باشد، آن گاه $A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$. بنابراین $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{29}$

(۳) اگر پیشامد موردنظر A باشد، آن گاه $A = \{0, 3, 5, 10, 15, 18, 20\}$. بنابراین $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{9}$

(۴) توجه کنید که $S = \{1, 2, \dots, 50\}$. پس $n(S) = 50$. اگر پیشامد موردنظر A باشد، آن گاه $A = \{3, 13, 23, 33, 43\}$. بنابراین $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$

(۵) توجه کنید که $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. اگر پیشامد موردنظر A باشد، آن گاه $A = \{1, 2, 5\}$. پس $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(۶) توجه کنید که $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $A = \{1, 3, 4, 6\}$. بنابراین $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(۷) توجه کنید که $S = \{10, 11, \dots, 99\}$. پس $n(S) = 90$. اگر عددی بر ۲، ۳ و ۵ بخش پذیر باشد، بر ۳۰ بخش پذیر است. پس $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$. بنابراین $A = \{30, 60, 90\}$



۸ توجه کنید که $B = \{7, 11, 15, 19, 23, 27, 31\}$. پس $n(S) = n(B) = 7$. اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن گاه

$$A = \{7, 11, 19, 23, 31\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{7} \text{ و } n(A) = 5 \text{ پس}$$

۹

$$S = \underbrace{\{r_1, r_2, b_1, b_2, b_3\}}_{\text{توپ‌های قرمز}} \cup \underbrace{\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8\}}_{\text{توپ‌های سیاه}} \cup \underbrace{\{a_1, a_2, a_3\}}_{\text{توپ‌های آبی}}, \quad A = \{b_1, b_2, b_3\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{13}$$

۱۰

$$S = \underbrace{\{r_1, r_2, \dots, r_6\}}_{\text{توپ‌های قرمز}} \cup \underbrace{\{g_1, g_2, g_3\}}_{\text{توپ‌های سبز}} \cup \underbrace{\{b_1, b_2, \dots, b_{12}\}}_{\text{توپ‌های سیاه}}, \quad A = \{b_4, b_5, \dots, b_{12}\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

۱۱

$$S = \underbrace{\{r_1, \dots, r_4\}}_{\text{مهره‌های قرمز}} \cup \underbrace{\{b_1, b_2, b_3\}}_{\text{مهره‌های آبی}} \cup \underbrace{\{w_1, w_2\}}_{\text{مهره‌های سفید}}, \quad A = \{r_1, \dots, r_4, b_1, b_2, b_3\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{9}$$

۱۲

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\text{الف} \quad A = \{1, 3, 5\}, \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ب} \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{6}$$

$$\text{پ} \quad C = \{1, 4\}, \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ت} \quad D = \{3, 5\}, \quad P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۱۳

		تاس دوم					
		۱	۲	۳	۴	۵	۶
تاس اول	۱	(۱, ۱)	(۱, ۲)	(۱, ۳)	(۱, ۴)	(۱, ۵)	(۱, ۶)
	۲	(۲, ۱)	(۲, ۲)	(۲, ۳)	(۲, ۴)	(۲, ۵)	(۲, ۶)
	۳	(۳, ۱)	(۳, ۲)	(۳, ۳)	(۳, ۴)	(۳, ۵)	(۳, ۶)
	۴	(۴, ۱)	(۴, ۲)	(۴, ۳)	(۴, ۴)	(۴, ۵)	(۴, ۶)
	۵	(۵, ۱)	(۵, ۲)	(۵, ۳)	(۵, ۴)	(۵, ۵)	(۵, ۶)
	۶	(۶, ۱)	(۶, ۲)	(۶, ۳)	(۶, ۴)	(۶, ۵)	(۶, ۶)

$$\text{الف} \quad A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\text{پ} B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\text{پ} C = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\}$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

$$\text{ت} D = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\}$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$$

$$\text{ث} E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

۱۴

$$\text{الف} A = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$\text{پ} B = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

$$\text{پ} C = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 6), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

۱۵

$$S = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$$

$$A = \{(1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 6)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{9}$$



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ گزینه (۴): توجه کنید که $S = \{1, 2, \dots, 50\}$ ، پس $n(S) = 50$. اگر پیشامد موردنظر A باشد، آن‌گاه $A = \{24, 25, \dots, 50\}$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{27}{50} \text{ و } n(A) = 27$$

۲ گزینه (۱): توجه کنید که $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ، پس $n(S) = 6$. اگر پیشامد موردنظر A باشد، آن‌گاه $n(A) = 2$ ، پس

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۳ گزینه (۴): توجه کنید که $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. اگر پیشامد موردنظر A باشد، آن‌گاه $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$. بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{6}$$

۴ گزینه (۱): توجه کنید که $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. اگر پیشامد موردنظر A باشد، آن‌گاه $A = \{2, 4, 6\}$. بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

۵ گزینه (۳): توجه کنید که $n(S) = 36$. اگر پیشامد موردنظر A باشد، آن‌گاه

$$A = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ بنابراین}$$

۶ گزینه (۲): توجه کنید که $n(S) = 36$. اگر پیشامد موردنظر A باشد، آن‌گاه

$$A = \{(2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{17}{36} \text{ بنابراین}$$

۷ گزینه (۲): توجه کنید که

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

پس $n(S) = 9$. اگر پیشامد موردنظر A باشد، آن‌گاه

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{9} \text{ و } n(A) = 5$$

۸ گزینه (۲): توجه کنید که

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

پس $n(S) = 12$. اگر پیشامد موردنظر A باشد، آن‌گاه

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \text{ و } n(A) = 8$$

۹. گزینه (۳): توجه کنید که $n(S) = 36$. اگر منظورمان از (a, b) این باشد که a نتیجه پرتاب تاس X و b نتیجه پرتاب تاس Y باشد و پیشامد موردنظر A باشد، آن‌گاه

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 6), \dots, (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \text{ و } n(A) = 4 \times 6 = 24 \text{ بنابراین}$$

۱۰. گزینه (۴): توجه کنید که $n(S) = 36$. اگر نتیجه را به صورت (عدد تاس سمیرا، عدد تاس سمیه) نشان دهیم و پیشامد موردنظر A باشد، آن‌گاه

$$A = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \text{ و } n(A) = 15 \text{ پس}$$



امتحان نهایی فصل اول



الف) درست

ب) نادرست

پ) درست

ت) نادرست

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A = \{2, 3, 5\}, \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ث) درست

$$\{a, b, c\} : \begin{cases} \text{یک عضو: } \{a\}, \{b\}, \{c\} \\ \text{دو عضو: } \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \\ \text{سه عضو: } \{a, b, c\} \end{cases}$$

ج) نادرست

د) درست

ه) نادرست

و) درست

ز) نادرست

ح) درست

د) نادرست. به عنوان مثال فرض کنید $A = \{1\}$ و $B = \{-2\}$ الف) $n(A) = 4$ ب) $\frac{1}{3}$ پ) $A \cup B = B$

ت) ۸ زیرمجموعه

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A = \{2, 4\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} \text{یک عضو: } \{\emptyset\}, \{\circ\}, \{3\} \\ \text{دو عضو: } \{\circ, 3\}, \{\circ, \emptyset\}, \{3, \emptyset\} \\ \text{سه عضو: } \{3, \circ, \emptyset\} \end{cases}$$

ث) اجتماع



الف) گزینه (۱)

ب) گزینه (۲)

$$S = \{(د, د), (د, پ), (پ, پ), (پ, د)\}, \quad A = \{(د, د)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

$$n(S) = 6 \times 6 = 36, \quad A = S - \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \Rightarrow n(A) = 36 - 6 = 30$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

پ) گزینه (۲): $A = \{-1, \circ, 1\}$

ت) گزینه (۱)

ث) گزینه (۲)

د) گزینه (۴)

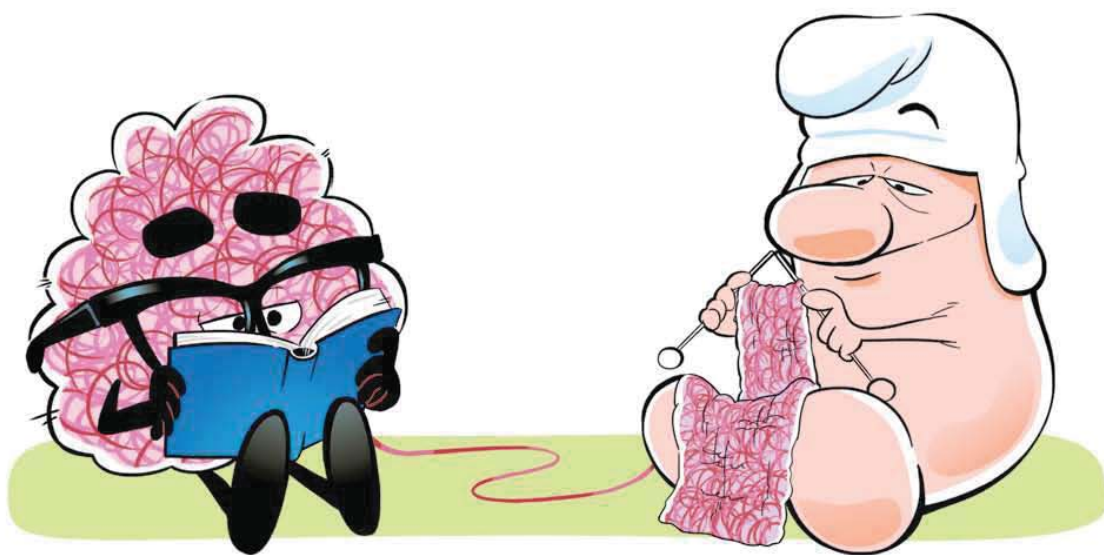
ج) گزینه (۴)

ه) گزینه (۳)

$$n(S) = 6 \times 6 = 36, \quad A = \{(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

فصل دوم

عددهای حقیقی





درس اول: عددهای گویا



درست یا نادرست

(الف) ☒ درست ☐ نادرست

(ب) ☒ درست ☐ نادرست

(پ) ☒ درست ☐ نادرست

(ت) ☒ درست ☐ نادرست

مثال: $\frac{1}{6}$

(ث) ☒ درست ☐ نادرست

کامل کنید

(ب) بی نهایت

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5} \\ \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4} \end{array} \right. \quad \text{(الف) ۲}$$

(پ) نمایش اعشاری متناوب و نمایش اعشاری مختوم $\frac{4}{3} < \frac{4+3}{3+2} < \frac{3}{2}$ (ت) ۷ (ث) گویا

پرسش‌های دو گزینه‌ای

(الف) گزینه (۱)

$$\text{روش اول: } -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}, \quad -\frac{32}{5} = -6\frac{2}{5}$$

$$-6\frac{2}{5}, -6, -5, -4, -3, -2\frac{1}{3}$$

۴ عدد صحیح

$$\text{روش دوم: } -\frac{7}{3} = -\frac{35}{15}, \quad -\frac{32}{5} = -\frac{96}{15}$$

$$-\frac{96}{15}, -\frac{90}{15}, -\frac{75}{15}, -\frac{60}{15}, -\frac{45}{15}, -\frac{35}{15}$$

۴ عدد صحیح

توجه کنید که $-90, -75, -60, -45$ مضرب‌های ۱۵ هستند.

(ب) گزینه (۱)

$$\frac{2}{3} < \frac{2+3}{3+4} < \frac{3}{4}$$

ابتدا عددی گویا بین $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ پیدا می‌کنیم:

$$-\frac{3}{4} < -\frac{5}{7} < -\frac{2}{3} \quad \text{در نتیجه } \frac{2}{3} < \frac{5}{7} < \frac{3}{4}$$

(پ) گزینه (۲)

$$-\frac{7}{8} = -\frac{7 \times 15}{8 \times 15} = -\frac{105}{120}, \quad -\frac{13}{15} = -\frac{13 \times 8}{15 \times 8} = -\frac{104}{120}$$

(ث) گزینه (۱)

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{2 \times 2 \times 5} \quad \text{(ت) گزینه (۱)}$$

(۱)

$$\text{یکی کردن مخرج‌ها: } \begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{2}{6} < \frac{3}{6} < \frac{4}{6}$$

$$\text{میانگین دو عدد: } \begin{cases} \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1+2}{6+3} = \frac{5}{12} \\ \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1+5}{6+12} = \frac{7}{24} \end{cases}$$

$$\text{مجموع صورت‌ها و مجموع مخرج‌ها: } \begin{cases} \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1+2}{6+3} < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{3}{9} < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{3}{9} < \frac{1+1}{6+3} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{2}{9} < \frac{1}{3} \end{cases}$$

(۲)

$$\begin{cases} -1/2 = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5} \Rightarrow -\frac{23}{7} < \frac{-23 + -6}{7+5} < -\frac{6}{5} \Rightarrow -\frac{23}{7} < -\frac{157}{70} < -\frac{6}{5} \\ -3\frac{2}{7} = -\frac{23}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{157}{70} \Rightarrow -\frac{157}{70} < \frac{-157-6}{70+5} < -\frac{6}{5} \Rightarrow -\frac{157}{70} < -\frac{241}{140} < -\frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{157}{70} \Rightarrow -\frac{23}{7} < \frac{-157-23}{70+7} < -\frac{157}{70} \Rightarrow -\frac{23}{7} < -\frac{387}{140} < -\frac{157}{70} \\ -\frac{23}{7} \end{cases}$$

(۳) چون یکی از اعداد مثبت و دیگری منفی است، پس دو عدد گویا بین صفر و $1\frac{2}{3}$ و همچنین دو عدد گویا بین $-3/6$ و صفر

$$-3/6 < -3 < -2 < 0, \quad 0 < \frac{1}{2} < 1 < 1\frac{2}{3}$$

به دست می‌آوریم:

(۴)

$$\frac{1}{3} < \frac{a}{11} < \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{مخرج کسرها}]{\text{یکی کردن}} \frac{22}{66} < \frac{6a}{66} < \frac{33}{66} \Rightarrow 22 < 6a < 33$$

$$\frac{1}{3} < \frac{4}{11} < \frac{1}{2} \text{ پس } a=4. \text{ در نتیجه } 6a=24$$

(۵) باید دو عدد طبیعی مانند a پیدا کنیم که $\frac{1}{6} < \frac{a}{5} < \frac{1}{2}$. مخرج کسرهای را برابر می‌کنیم: $\frac{5}{30} < \frac{6a}{30} < \frac{15}{30}$. بنابراین باید a را طوری

انتخاب کنیم که $5 < 6a < 15$. در نتیجه $a=2$ و $a=1$ ، پس اعداد گویای مورد نظر $\frac{2}{5}$ و $\frac{1}{5}$ هستند.



۶

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{8} = \frac{3 \times 4}{8 \times 4} = \frac{12}{32} \\ \frac{11}{32} \end{array} \Rightarrow \frac{11}{32} < \frac{12}{32} < \frac{14}{32} \Rightarrow \frac{11}{32} < \frac{3}{8} < \frac{7}{16} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{7}{16} = \frac{7 \times 2}{16 \times 2} = \frac{14}{32} \end{array} \right.$$

۷

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} = \frac{2 \times 15}{3 \times 15} = \frac{30}{45} \\ \frac{3}{4} = \frac{3 \times 10}{4 \times 10} = \frac{30}{40} \end{array} \Rightarrow \frac{30}{45} < \frac{30}{40} < \frac{30}{36} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{6} = \frac{5 \times 6}{6 \times 6} = \frac{30}{36} \end{array} \right.$$

$$\frac{5}{11} = \frac{50}{110} > \frac{50}{111}, \quad \frac{50}{111} = \frac{500}{1110} > \frac{500}{1111}$$

۸ الف) توجه کنید که

$$\frac{500}{1111} < \frac{50}{111} < \frac{5}{11}$$

$$\frac{20}{23} < \frac{20+11}{23+11} = \frac{31}{34} < \frac{31+11}{34+11} = \frac{42}{45}$$

ب) برای اعداد طبیعی a , b و k , اگر $\frac{a}{b} < 1$, آن گاه $\frac{a+k}{b+k} < \frac{a}{b}$, پس

پ) توجه کنید که

$$\frac{10}{11} = \frac{100}{110} < \frac{100}{103} \Rightarrow -\frac{10}{11} > -\frac{100}{103}, \quad \frac{10}{11} = \frac{1000}{1100} > \frac{1000}{1103} \Rightarrow -\frac{10}{11} < -\frac{1000}{1103}$$

$$\text{پس } -\frac{100}{103} < -\frac{10}{11} < -\frac{1000}{1103}$$

$$\frac{3}{8} = 1/375 \text{ پس } \frac{3}{8} = 0/375 \text{ یا اینکه } \frac{3}{8} = \frac{11}{8} = 1/375 \text{ الف) ۹}$$

$$-\frac{8}{15} = -0/5333... = -0/53 \text{ ب)}$$

$$\frac{2}{12} = 2/583 \text{ پس } \frac{2}{12} = 0/583 \text{ یا اینکه } \frac{2}{12} = \frac{31}{12} = 2/58333... = 2/583 \text{ پ)}$$

$$-\frac{5}{7} = -0/714285 \text{ ت)}$$

$$\frac{1}{24} = 0/041666... = 0/0416 \text{ توجه کنید که ۱۰) پس رقم پنجم در نمایش اعشاری } \frac{1}{24} \text{ برابر است با ۶.}$$

۱۱

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{19}{15} = a/b\bar{c} \\ \frac{19}{15} = 1/2\bar{6} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=6 \end{cases} \right.$$

۱۲

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{2 \times 2 \times 2} \text{ مختوم الف)}$$

$$\frac{7}{25} = \frac{7}{5 \times 5} \text{ مختوم ب)}$$

$$\frac{11}{200} = \frac{11}{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5} \text{ مختوم پ)}$$

$$\frac{7}{30} = \frac{7}{2 \times 3 \times 5} \text{ متناوب ت)}$$

$$\frac{5}{21} = \frac{5}{3 \times 7} \text{ متناوب ث)}$$

(۱۳) الف

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{3}{12}}{\frac{6}{12} - \frac{4}{12} - \frac{3}{12}} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{-1}{12}} = -7$$

ب

$$3 - \frac{2 - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = 3 - \frac{1 - \frac{2}{2}}{\frac{3}{2}} = 3 - \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = 3 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = 3 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

پ

$$\frac{1 + \frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} \div \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{3}{5}} \div \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{7}{3} \div (1 - 2) = \frac{7}{3} \times (-1) = -\frac{7}{3}$$

ت

$$\frac{2 - \frac{1}{4} \div \frac{3}{2} - 1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{2 - \left(\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \right) - 1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{2 - \frac{1}{6} - 1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{3}$$

ث

$$1 \div \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{5}}} \right) = 1 \div \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{5}}} \right) = 1 \div \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{5}{4}} \right) = 1 \div \left(1 + \frac{1}{\frac{9}{4}} \right) = 1 \div \left(1 + \frac{4}{9} \right) = 1 \div \left(\frac{13}{9} \right) = 1 \times \frac{9}{13} = \frac{9}{13}$$

ج

$$\frac{4}{7} \div \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} + 1 = \frac{4}{7} \div \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{4}}} + 1 = \frac{4}{7} \div \frac{1}{1 + \frac{4}{7}} + 1 = \frac{4}{7} \div \frac{1}{\frac{11}{7}} + 1 = \frac{4}{7} \div \frac{7}{11} + 1 = \left(\frac{4}{7} \times \frac{11}{7} \right) + 1 = 1 + 1 = 2$$

د

$$1 + \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} \div 4 = 1 + \frac{1 + \frac{2}{2}}{2} \div 4 = 1 + \frac{1 + \frac{3}{2}}{2} \div 4 = 1 + \frac{\frac{5}{2}}{2} \div 4 = 1 + \frac{5}{4} \div 4 = 1 + \frac{5}{16} \div 4 = 1 + \left(\frac{5}{16} \times \frac{1}{4} \right) = 1 + \frac{5}{64} = \frac{69}{64}$$



تمرین‌های ویژه

۱

الف) $\overline{0/23} < \overline{0/23} \begin{cases} \overline{0/23} = 0/2323... \\ \overline{0/23} = 0/2333... \end{cases}$

ب) $1/\overline{801} < \overline{1/801} \begin{cases} 1/\overline{801} = 1/80101... \\ \overline{1/801} = 1/801801... \end{cases}$

۲

الف) $2/\overline{4} + 3/\overline{2} = 5/\overline{6}$

ب) $6/\overline{7} - 3/\overline{4} = 3/\overline{3}$

۳

الف) $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{4}) \dots (1 + \frac{1}{9}) = (\frac{3}{2})(\frac{4}{3})(\frac{5}{4}) \dots (\frac{10}{9}) = \frac{3 \times 4 \times 5 \times \dots \times 9 \times 10}{2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 8 \times 9} = \frac{10}{2} = 5$

ب) $\frac{3}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{4}{1 + \frac{1}{3}} + \frac{5}{1 + \frac{1}{4}} + \dots + \frac{19}{1 + \frac{1}{18}} = \frac{3}{\frac{3}{2}} + \frac{4}{\frac{4}{3}} + \frac{5}{\frac{5}{4}} + \dots + \frac{19}{\frac{19}{18}} = 2 + 3 + 4 + \dots + 18 = \frac{18 \times 19}{2} - 1 = 170$

۴) ابتدا مخرج کسرها را یکی می‌کنیم: $\frac{15}{18} < \frac{n}{18} < \frac{22}{18}$. پس باید $15 < n < 22$ ، یعنی n یکی از عددهای ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰

و ۲۱ است. بنابراین شش عدد طبیعی مانند n می‌توان پیدا کرد.

۵) ابتدا توجه کنید که

$$2 + \frac{2}{3 - \frac{3}{3 - \frac{1}{3}}} = 2 + \frac{2}{3 - \frac{3}{3 - \frac{1}{3}}} = 2 + \frac{2}{3 - \frac{9}{8}} = 2 + \frac{2}{\frac{15}{8}} = 2 + \frac{16}{15} = \frac{46}{15}$$

$$x = \frac{46}{15} + 1 = \frac{61}{15} = 4 \frac{1}{15}$$

در نتیجه $\frac{46}{15} = x - 1$ ، پس

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ گزینه (۱)

ابتدا مخرج دو کسر را یکی می‌کنیم، پس $\frac{3}{4} = \frac{15}{20} < \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$. سپس مخرج ۲۰ به‌دست آمده را به مخرج‌های گزینه‌های داده شده تبدیل می‌کنیم. با بررسی گزینه‌ها به‌دست می‌آید:

$$\frac{3}{4} = \frac{60}{80} < \frac{61}{80} < \frac{62}{80} < \frac{63}{80} < \frac{64}{80} = \frac{4}{5}$$

۲ گزینه (۱)

این سوال را با روش یکی کردن صورت کسرها حل می‌کنیم. توجه کنید اگر صورت دو کسر مثبت برابر باشد، آن کسر که مخرج کوچک‌تری دارد، بزرگ‌تر است. بنابراین

$$a = \frac{1}{51} = \frac{100}{5100} < \frac{100}{5010} = b \Rightarrow a < b, \quad b = \frac{100}{5010} = \frac{1000}{50100} < \frac{1000}{50010} = c \Rightarrow b < c$$

پس $a < b < c$.

۳ گزینه (۲)

از روش یکی کردن مخرج‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{8}{7} = \frac{24}{21} < \frac{27}{21} = \frac{9}{7}$$

پس اعداد $\frac{25}{21}$ و $\frac{26}{21}$ بین $\frac{8}{7}$ و $\frac{9}{7}$ قرار دارند.

۴ گزینه (۱)

توجه کنید که

$$\begin{array}{r} 14 \quad | \quad 3 \\ -12 \quad | \quad 4/66... \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 2 \\ \vdots \end{array}$$

$$\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3} = 4\frac{4}{6}$$

۵ گزینه (۳)

توجه کنید که

$$\begin{array}{r} 13 \quad | \quad 12 \\ -12 \quad | \quad 1/0833... \\ \hline 100 \\ -96 \\ \hline 40 \\ -36 \\ \hline 40 \\ -36 \\ \hline 4 \\ \vdots \end{array}$$

$$\frac{13}{12} = 1\frac{1}{12} = 1\frac{83}{1000}$$



گزینه (۲) ۶

توجه کنید که

$$\frac{3\frac{1}{5} - \left(3 - \frac{1}{5}\right)}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{16}{5} - \left(\frac{15}{5} - \frac{1}{5}\right)}{\frac{5+1}{5}} = \frac{\frac{16}{5} - \frac{14}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{16-14}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

گزینه (۱) ۷

توجه کنید که

$$2 + \left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \div \frac{5}{24} \right) = 2 + \left(\frac{4-3}{12} \div \frac{5}{24} \right) = 2 + \left(\frac{1}{12} \times \frac{24}{5} \right) = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$$

گزینه (۳) ۸

توجه کنید که

$$1 - \frac{1}{1 + \frac{3}{1 - \frac{3}{2}}} \div \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{3}{\frac{-1}{2}}} \div \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1 - 6} \div \frac{1}{2} = 1 - \left(-\frac{1}{5} \times 2 \right) = 1 - \left(-\frac{2}{5} \right) = \frac{7}{5}$$

گزینه (۲) ۹

توجه کنید که

$$2 + \frac{1}{2 \div \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} \div \left(-\frac{1}{3} \right) = 2 + \frac{1}{2 \div \frac{1}{\frac{1}{2}}} \div \left(-\frac{1}{3} \right) = 2 + \frac{1}{2 \div 2} \div \left(-\frac{1}{3} \right) = 2 + (1 \times (-3)) = 2 - 3 = -1$$

گزینه (۱) ۱۰

توجه کنید که

$$\frac{3 + \frac{1}{2}}{3} - 2 \div \frac{2}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{7}{2}}{3} - 2 \div \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{7}{6} - 2 \div \frac{6}{4} = \frac{7}{6} - 2 \times \frac{4}{6} = \frac{7}{6} - \frac{8}{3} = \frac{7-8}{6} = -\frac{1}{6}$$

درس دوم: عددهای حقیقی



درست یا نادرست

(الف) ☒ (ب) ☒ (پ) ☒ (ت) ☒ (ث) ☒



(الف) گنگ (ب) بی نهایت (پ) بی نهایت (ت) حقیقی

$$\begin{cases} 1 < \sqrt{2} < 2 \\ -3 < -\sqrt{5} < -2 \end{cases} \Rightarrow -3 < -\sqrt{5} < \underbrace{-2 < -1 < 0 < 1}_{\text{تا 4}} < \sqrt{2} < 2$$

پرسش‌های دو گزینه‌ای

$$\sqrt{\frac{45}{20}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(الف) گزینه (۲)

$$4 < 7 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{7} < 3 \Rightarrow -3 < -\sqrt{7} < -2$$

(ب) گزینه (۱)

$$\sqrt{8} \approx 2/83, \quad \sqrt{10} \approx 3/16$$

(پ) گزینه (۱)

$$3 < \sqrt{n} < 4 \Rightarrow 9 < n < 16 \Rightarrow n \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

(ت) گزینه (۲)

(ث) گزینه (۲)

تمرین‌های تشریحی

(۱) گنگ. چون نمایش اعشاری 0.1223334444000 متناوب یا مختوم نیست.

(۲) نمایش اعشاری $\frac{7}{3}$ متناوب است. اما چون $\sqrt{7}$ عددی گنگ است، نمایش اعشاری $\sqrt{7}$ متناوب یا مختوم نیست.

(۳)

$\sqrt{4} \notin \mathbb{Q}'$ (الف) $\sqrt{0.04} \in \mathbb{Q}$ (ب) $0.0100100010001... \in \mathbb{R}$ (پ) $0.0100100010001... \notin \mathbb{Q}$ (ت)

(۴)

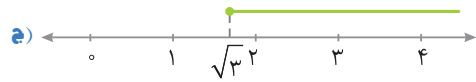
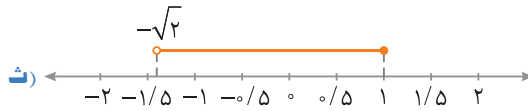
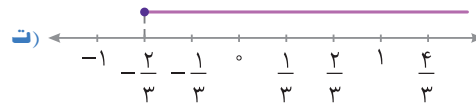
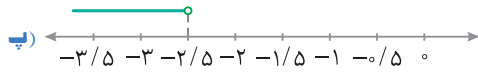
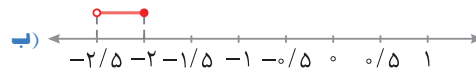
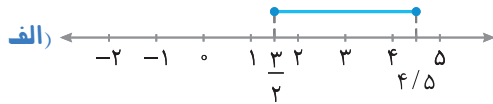
$$9 < 11 < 16 \Rightarrow 3 < \sqrt{11} < 4$$

(۵) (الف) $\mathbb{R}$ (ب) $\emptyset$ (پ) $\emptyset$ (ت) $\mathbb{Z}$

(ث) $\mathbb{Q}$ (ج) $\mathbb{R}$ (د) $\mathbb{Q}'$ (ه) $\mathbb{Q}'$



۶



۷

الف) $\{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

ب) $\{x | x \in \mathbb{R}, -2 \leq x < 4\}$

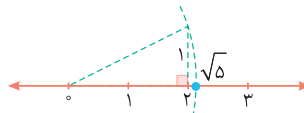
پ) $\{x | x \in \mathbb{R}, -\sqrt{3} \leq x \leq -\sqrt{2}\}$

ت) $\{x | x \in \mathbb{R}, -1 < x < \frac{3}{2}\}$

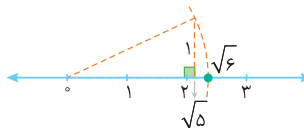
ث) $\{x | x \in \mathbb{R}, x \leq \sqrt{5}\}$

ج) $\{x | x \in \mathbb{R}, x > \sqrt{2}\}$

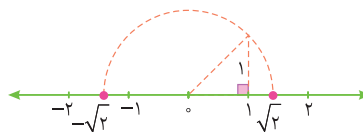
۸ الف) $\sqrt{5}^2 = 2^2 + 1^2$



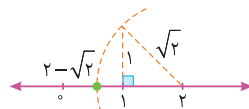
ب) $\sqrt{6}^2 = \sqrt{5}^2 + 1^2$



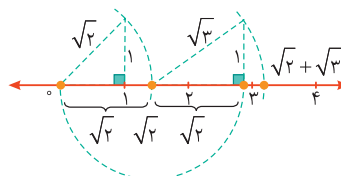
پ) $\sqrt{2}^2 = 1^2 + 1^2$

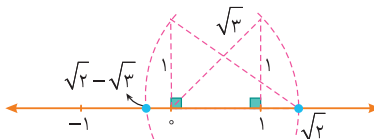


ت) باید از پاره‌خطی به طول ۲، پاره‌خطی به طول $\sqrt{2}$ را حذف کنیم.



ث





- (۹) الف) $4 < 5 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3$ ب) $4 < 8 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{8} < 3 \Rightarrow -3 < -\sqrt{8} < -2$
- (۱۰) الف) توجه کنید که $\sqrt{5} = 2/23$ و $\sqrt{3} = 1/73$. بنابراین عددهای گویای $2/1$ و 2 ، $1/9$ ، $1/8$ هستند. ب) توجه کنید که $3^2 < 12 < 13 < 14 < 15 < 4^2$ ، بنابراین
- ب) توجه کنید که $(1/2)^2 = 1/44$ و $(1/4)^2 = 1/96$. از طرف دیگر،
- $(1/2)^2 = 1/44 < 1/5 < 1/6 < 1/7 < 1/8 < 1/96 = (1/4)^2$

پس

$$1/2 < \sqrt{1/5} < \sqrt{1/6} < \sqrt{1/7} < \sqrt{1/8} < 1/4 \Rightarrow -1/4 < -\sqrt{1/8} < -\sqrt{1/7} < -\sqrt{1/6} < -\sqrt{1/5} < -1/2$$

ت) توجه کنید که $-\sqrt{2} \approx -1/4$ ، پس

(۱۱)

$$\begin{cases} 1 < 2 < 4 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow 6 < 5 + \sqrt{2} < 7 \\ 4 < 5 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow 5 < 3 + \sqrt{5} < 6 \end{cases} \Rightarrow 3 + \sqrt{5} < 5 + \sqrt{2}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. گزینه (۳)
- گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) به ترتیب برابر $0/02$ ، $0/200$ و $0/002$ هستند، پس گویا هستند. نمایش اعشاری گزینه (۳) مختوم یا متناوب نیست، پس گنگ است.
۲. گزینه (۲)
۳. گزینه (۴)
۴. گزینه (۲): توجه کنید که $1 < \sqrt{3} < 2$ ، پس $-2 < \sqrt{3} - 3 < -1$.
۵. گزینه (۱): توجه کنید که بنابر رابطه فیثاغورس، بنابرین نقطه نمایش $-1 + \sqrt{10}$ است.
- $AB^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow AB = \sqrt{10}$



درس سوم: قدر مطلق و محاسبه تقریبی



درست یا نادرست

✓ (ث)

✓ (ت)

✗ (پ)

✓ (ب)

✗ (الف)

کامل کنید

(پ) مثبت

(ب) حاصل ضرب همان دو عدد

(الف) همان عدد

$$b < 0 \Rightarrow -b > 0 \Rightarrow a + (-b) > 0 \Rightarrow |a - b| = a - b$$

(ت) نامثبت

پرسش‌های دو گزینه‌ای

(پ) گزینه (۱)

(ب) گزینه (۲)

(الف) گزینه (۲)

$$\text{ت) گزینه (۲)} \quad \begin{cases} |a| \geq 0 \\ |b-1| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |a| = |b-1| = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b-1 = 0 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$\text{ث) گزینه (۲)} \quad \begin{cases} a > 0 \Rightarrow \frac{a}{|a|} = \frac{a}{a} = 1 \\ a < 0 \Rightarrow \frac{a}{|a|} = \frac{a}{-a} = -1 \end{cases}$$

تمرین‌های تشریحی

(۱) (الف) توجه کنید که

$$|5 - |-3|| = |5 - 3| = 2, \quad |4 - |3 - (-3)|| = |4 - |3 + 3|| = |4 - 6| = 2$$

بنابراین مقدار عبارت موردنظر برابر است با $2 - 2 = 0$.

(پ) ابتدا توجه کنید که $|-1 - (-4)| = |-1 + 4| = 3$. چون $\sqrt{2} \approx 1/4$ ، پس $|3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$. بنابراین مقدار عبارت مثبت

$$2 + 3 - (3 - \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}$$

(پ) ابتدا توجه کنید که $\sqrt{2} \approx 1/4$ ، پس $2\sqrt{2} < 3$. در نتیجه

$$|3 - 2\sqrt{2}| = 3 - 2\sqrt{2}, \quad |2\sqrt{2} - 4| = -(2\sqrt{2} - 4) = 4 - 2\sqrt{2}$$

مثبت منفی

$$(3 - 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) = 7 - 4\sqrt{2}$$

ت) ابتدا توجه کنید که $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{4} < 3$ ، پس

$$\underbrace{|3 - \sqrt{3}|}_{\text{مثبت}} = 3 - \sqrt{3}, \quad \underbrace{|1 - \sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$$

بنابراین مقدار عبارت موردنظر برابر است با $(3 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1) - 2 = 0$.

ث) توجه کنید که

$$\underbrace{|\sqrt{3} - \sqrt{2}|}_{\text{مثبت}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}, \quad \underbrace{|1 - \sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = \sqrt{3} - 1$$

بنابراین مقدار عبارت موردنظر برابر است با $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - 1) - 1 = -\sqrt{2}$.

ج) ابتدا توجه کنید که $\sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$ ، پس $2\sqrt{7} < 6$ در نتیجه

$$\underbrace{|6 - 2\sqrt{7}|}_{\text{مثبت}} = 6 - 2\sqrt{7}, \quad \underbrace{|2\sqrt{7} - 7|}_{\text{منفی}} = 7 - 2\sqrt{7}$$

بنابراین مقدار عبارت موردنظر برابر است با $(6 - 2\sqrt{7}) - (7 - 2\sqrt{7}) - 1 = -2$.

د) توجه کنید که $|-2^3| = 8$ و $|-3|^3 = 27$ ، بنابراین مقدار عبارت موردنظر برابر است با $\frac{3+8}{-5+27} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$.

ه) ابتدا توجه کنید که $||-4| - |-2|| = |4 - 2| = 2$ ، بنابراین مقدار عبارت موردنظر برابر است با $\frac{5-1+1}{2+3} = \frac{5}{5} = 1$.

۲) چون $1 < \sqrt{2} < 2$ ، پس $1 < a < 2$ ، بنابراین $1 - a < 0$ ، $2a - 4 < 0$ و $a - 1 > 0$ داریم:

$$|1 - a| + |2a - 4| + |a - 1| = -(1 - a) + (-(2a - 4)) + a - 1 = -1 + 4 - 2a + a + 4 - 1 = 2$$

۳) توجه کنید که $\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$ ، بنابراین $a = |\sqrt{5} - 3| = -(\sqrt{5} - 3) = 3 - \sqrt{5}$

$$b = |a - 5| = |(3 - \sqrt{5}) - 5| = |-2 - \sqrt{5}| = |-(2 + \sqrt{5})| = 2 + \sqrt{5}$$

در نتیجه،

$$|b - 2| = |(2 + \sqrt{5}) - 2| = |\sqrt{5}| = \sqrt{5}$$

به این ترتیب،

۴) توجه کنید که

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3, \quad \sqrt{2^2} = |2| = 2, \quad \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$$

بنابراین عبارت موردنظر برابر است با $|3 - 5(2) + 2(\frac{5}{2})| = |-2| = 2$.

۵) الف) $(2, 5)$ ، $(1, 10)$ و $(3, \frac{10}{3})$. ب) $(-4, 3)$ ، $(-8, 6)$ و $(8, -6)$.

۶) الف) -4 ، -5 و -6 . ب) صفر، 1 و 2 .

۷) خیر. به ازای $a = -1$ و $b = 2$ تساوی برقرار نیست.

۸) $a = 5$ و $b = -3$

۹) الف) راه حل اول توجه کنید که چون $a < 0$ ، پس $-3a > 0$ و $5a < 0$ ، بنابراین

$$\frac{|-3a|}{a} + \frac{|5a|}{-a} = \frac{-3a}{a} + \frac{-5a}{-a} = -3 + 5 = 2$$

در نتیجه

$$\frac{|-3a|}{a} + \frac{|5a|}{-a} = \frac{|3a|}{a} + \frac{|5a|}{-a} = \frac{-3a}{a} + \frac{-5a}{-a} = -3 + 5 = 2$$

راه حل دوم توجه کنید که $|-3a| = |3a|$ ، بنابراین



$$|a - |-a|| = |a - (-a)| = |2a| = -2a$$

(ب) چون $a < 0$ ، پس $|-a| = -a$ ، بنابراین

$$|a - |a - |-a|| = |a - (-2a)| = |3a| = -3a$$

در نتیجه

$$|-a| = -(-a) = a, \quad |2a| = 2a, \quad |-4a| = -(-4a) = 4a, \quad |2a| = 2a$$

(۱۰) چون $a > 0$ ، پس

$$\frac{|2a - a| + 2a}{4a - 2a} = \frac{a + 2a}{2a} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}$$

بنابراین مقدار عبارت موردنظر برابر است با

$$a - c > 0, \quad b - c > 0, \quad c - a < 0$$

(۱۱) توجه کنید که $a > 0$ ، $b > 0$ و $c < 0$ ، پس

$$|a - c| + |b - c| - |c - a| = a - c + b - c - (-(c - a)) = a + b - 2c + c - a = b - c$$

بنابراین

(۱۲)

(الف) $a > 0$ ، $\frac{|a - |a||}{a} = \frac{|a - a|}{a} = \frac{0}{a} = 0$

(ب) $a < 0$ ، $\frac{|a - |a||}{a} = \frac{|a - (-a)|}{a} = \frac{|2a|}{a} = \frac{-2a}{a} = -2$

$$|a + 3| = a + 3, \quad |4 - a| = 4 - a$$

(۱۳) چون $-3 < a < 4$ ، پس

بنابراین مقدار عبارت موردنظر برابر است با $(a + 3) + (4 - a) = 7$.

(۱۴)

(الف) $\sqrt{(4 - \sqrt{5})^2} = |4 - \sqrt{5}| = 4 - \sqrt{5}$

(ب) $\sqrt{(\sqrt{15} - 4)^2} = |\sqrt{15} - 4| = -(\sqrt{15} - 4) = 4 - \sqrt{15}$

(پ) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} - 2| + |\sqrt{3} - 1| = -(\sqrt{3} - 2) + \sqrt{3} - 1 = -\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} - 1 = 1$

(ت) $\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} = |\sqrt{2} - 1| + |1 - \sqrt{3}| + |\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \sqrt{2} - 1 - (1 - \sqrt{3}) - (\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{2} - 1 - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 2$

(۱۵) چون $a < 0$ ، پس $|a| = -a$ ، از طرف دیگر،

$$\sqrt{4a^2} = \sqrt{(2a)^2} = |2a| = -2a, \quad \sqrt{(-a)^2} = | -a | = -a$$

$$\frac{a}{-a} + \frac{-a}{a} + (-2a) + (-a) = -1 - 1 - 2a - a = -2 - 3a$$

بنابراین عبارت موردنظر برابر است با

(۱۶) (الف) توجه کنید که

$$\sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{(ab)^2} = |ab| = -ab, \quad a\sqrt{b^2} = a|b| = ab, \quad b\sqrt{a^2} = b|a| = b(-a) = -ab$$

بنابراین عبارت موردنظر برابر است با $-ab + ab - ab = -ab$.

$$\sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{(ab)^2} = |ab| = -ab$$

(ب) چون a منفی و b مثبت است، پس $ab < 0$ و $|ab| = -ab$ ، در نتیجه

از طرف دیگر، $b - a \geq 0$ ، پس $|b - a| = b - a$ ، بنابراین حاصل عبارت برابر است با $a(b - a) - a(-a) - ab = 0$.

(۱۷) مجموع دو عدد نامنفی صفر شده است، بنابراین آن دو عدد باید برابر صفر باشند. در نتیجه

$$\begin{cases} |b - 3| = 0 \Rightarrow (b - 3) = 0 \Rightarrow b = 3 \quad (۱) \\ |a - 2b| = 0 \Rightarrow (a - 2b) = 0 \Rightarrow a = 2b \xrightarrow{(۱)} a = 6 \end{cases}$$

(۱۸) چون مجموع سه عدد نامنفی برابر صفر شده است، پس هر یک از آن‌ها برابر صفر است. در نتیجه

$$|a-1|=0 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow a=1, \quad |2b-3|=0 \Rightarrow 2b-3=0 \Rightarrow b=\frac{3}{2}, \quad \left|c+\frac{1}{2}\right|=0 \Rightarrow c+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow c=-\frac{1}{2}$$

$$a+b+c=1+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=2 \quad \text{بنابراین}$$

(۱۹) ابتدا توجه کنید که $|a| \geq 0$ ، پس $-a \geq 0$ ، یعنی $a \leq 0$. بنابراین

$$1-a > 0 \Rightarrow |1-a|=1-a, \quad -2a \geq 0 \Rightarrow |-2a|=-2a$$

در نتیجه حاصل عبارت برابر است با $(1-a)-(-2a)+(-a)=1$.

تمرین‌های ویژه

(۱) ابتدا توجه کنید که

$$a < \frac{1}{2} \Rightarrow 2a-1 < 0 \Rightarrow |2a-1|=-(2a-1)=1-2a, \quad \frac{1}{3} < a \Rightarrow 3a-1 > 0 \Rightarrow |3a-1|=3a-1$$

بنابراین حاصل عبارت موردنظر برابر است با $(1-2a)+(3a-1)=a$.

(۲) چون $a < -1$ ، پس $2a-1 < 0$. بنابراین

$$|2a-1|=-(2a-1)=1-2a$$

$$|a+|2a-1||=|a+(1-2a)|=|\underbrace{1-a}_{+}|=1-a$$

$$|2a+|a+|2a-1||=|2a+(1-a)|=|\underbrace{a+1}_{+}|=-(a+1)=-a-1$$

(۳) الف) توجه کنید که

$$a < b \Rightarrow a-b < 0 \Rightarrow |2a-2b|=|2(a-b)|=-2(a-b)=2b-2a$$

$$a < b \Rightarrow b-a > 0 \Rightarrow |b-a|=b-a$$

$$a < 0 \Rightarrow 2-a > 0 \Rightarrow |2-a|=2-a$$

$$\frac{|2a-2b|}{|b-a|}-|2-a|=\frac{2(b-a)}{b-a}-(2-a)=2-2+a=a$$

بنابراین

$$|b+|a||=|b-a|=b-a$$

ب) چون $a < 0$ ، پس $|a|=-a$. بنابراین

$$a < b \Rightarrow a-b < 0 \Rightarrow |a-b|=-(-a-b)=b-a$$

$$\frac{3|a-b|}{|b+|a||}=\frac{3(b-a)}{b-a}=3$$

در نتیجه



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

گزینه (۲)

$$\left| 2 - \frac{|-1 - (-3)|}{2} \right| = \left| 2 - \frac{2}{2} \right| = |2 - 1| = 1$$

ابتدا توجه کنید که $|-1 - (-3)| = |-1 + 3| = 2$. بنابراین

گزینه (۴)

$$|a - b| - |b - a + 3| = |4| - |-4 + 3| = 4 - |-1| = 4 - 1 = 3$$

توجه کنید که $a - b = 4$ و $b - a = -4$. بنابراین

گزینه (۱)

$$\begin{aligned} \text{ابتدا توجه کنید که } \sqrt{3} \approx 1/7, \text{ بنابراین } 3 < 2\sqrt{3} < 5. \text{ در نتیجه} \\ |3 - 2\sqrt{3}| = -(3 - 2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3, \quad |2\sqrt{3} - 5| = -(2\sqrt{3} - 5) = 5 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

بنابراین حاصل عبارت برابر است با $(2\sqrt{3} - 3) + (5 - 2\sqrt{3}) = 2$.

گزینه (۴)

چون $\sqrt{x^2} = |x|$ پس

$$\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = |1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1, \quad \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$$

بنابراین حاصل عبارت برابر است با $(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2} = \sqrt{2} - 2$.

گزینه (۱)

چون $a < 0$ ، پس $|3a| = -3a$. بنابراین

$$|3a| - a = |-3a - a| = |-4a| = -4a, \quad |3a| + a = |-3a + a| = |-2a| = -2a$$

در نتیجه حاصل عبارت برابر است با $(-4a) - (-2a) = -4a + 2a = -2a$.

گزینه (۴)

$$0 < b \Rightarrow |-b| = -(-b) = b$$

ابتدا توجه کنید که

$$|a - |-b|| = |a - b| = -(a - b) = b - a$$

پس

$$|4a - (b - a)| = |4a - b + a| = |5a - b|$$

بنابراین حاصل عبارت برابر است با

$$|5a - b| = -(5a - b) = b - 5a$$

چون $a < 0$ و $-b < 0$ ، پس $5a - b < 0$. در نتیجه

گزینه (۳)

$$\sqrt{(-a)^2} = |-a| = -a, \quad \sqrt{a^2} = |a| = -a$$

از رابطه $\sqrt{x^2} = |x|$ به دست می‌آید

$$\frac{a - (-a)}{-a} = \frac{a + a}{-a} = \frac{2a}{-a} = -2$$

پس حاصل عبارت برابر است با -2

۸. گزینه (۴)

چون مجموع سه عدد نامنفی برابر صفر شده است، پس هر سه عدد برابر صفر هستند. در نتیجه

$$|1-a|=0 \Rightarrow 1-a=0 \Rightarrow a=1, \quad 2|2-b|=0 \Rightarrow 2-b=0 \Rightarrow b=2, \quad 3|3-c|=0 \Rightarrow 3-c=0 \Rightarrow c=3$$

$$a+b+c=1+2+3=6 \text{ بنابراین}$$

۹. گزینه (۱)

$$|2a|=-2a, \quad |3a|=-3a$$

چون $|a|=-a$ ، پس $-a \geq 0$ ، یعنی $a \leq 0$. بنابراین

$$|6a-|2a||-|3a|=|6a-(-2a)|-(-3a)=|8a|+3a=-8a+3a=-5a$$

در نتیجه

۱۰. گزینه (۴)

برای عدد a دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول $a > 0$ ، بنابراین $|a|=-(-a)=a$ ، در نتیجه

$$\left| 3 - \frac{2|a|}{a} \right| = \left| 3 - \frac{2a}{a} \right| = |3-2|=1$$

$$\left| 3 - \frac{2|a|}{a} \right| = \left| 3 - \frac{2(-a)}{a} \right| = |3+2|=5$$

حالت دوم $a < 0$ ، بنابراین $|a|=-a$ ، در نتیجه

بنابراین مجموع مقادیر ممکن عبارت موردنظر برابر است با $1+5=6$.



امتحان نهایی فصل دوم

الف) نادرست	ب) نادرست	پ) درست	ت) درست
ث) نادرست	ج) درست	د) نادرست	ز) نادرست
۲ الف) حقیقی	ب) گنگ	پ) $-xy$	ت) ۱ و ۲
۳ الف) گزینه (۴)	ب) گزینه (۳)	پ) گزینه (۳)	ت) گزینه (۱)
ث) گزینه (۲)	ج) گزینه (۳)	ج) گزینه (۲)	ج) گزینه (۲)
خ) گزینه (۳)	د) گزینه (۴)	د) گزینه (۳)	ز) گزینه (۴)
ز) گزینه (۲)	ژ) گزینه (۲)	س) گزینه (۳)	



الف) $|6 - 5\sqrt{3}| = -(6 - 5\sqrt{3}) = -6 + 5\sqrt{3}$

ب) $|2 - 3\sqrt{5}| = -(2 - 3\sqrt{5}) = -2 + 3\sqrt{5}$

پ) $|3 - \sqrt{5}| + |-2 - \sqrt{5}| = 3 - \sqrt{5} + (-(-2 - \sqrt{5})) = 3 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} = 5$

ت) $|\sqrt{3} - \sqrt{5}| - |\sqrt{5}| = -(\sqrt{3} - \sqrt{5}) - \sqrt{5} = -\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{5} = -\sqrt{3}$

ث) $|2 - \pi| + |-2| = -(2 - \pi) + 2 = -2 + \pi + 2 = \pi$

ج) $|\sqrt{5} - 3| + |\sqrt{5} - 2| + |-2| = -(\sqrt{5} - 3) + \sqrt{5} - 2 + 2 = -\sqrt{5} + 3 + \sqrt{5} = 3$

د) $|2 - \sqrt{3}| + |1 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3} - (1 - \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} = 1$

ز) $|2 - \sqrt{8}| = -(2 - \sqrt{8}) = -2 + \sqrt{8}$

ژ) $|\sqrt{3} - 2| - |2 - \sqrt{3}| = -(\sqrt{3} - 2) - (2 - \sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 2 - 2 + \sqrt{3} = 0$

توجه کنید که $\sqrt{3} \approx 1/7$

توجه کنید که $2 < \sqrt{5} < 3$

توجه کنید که $2 < \sqrt{5} < 3$

توجه کنید که $3 < \pi < 4$

توجه کنید که $2 < \sqrt{5} < 3$

توجه کنید که $1 < \sqrt{3} < 2$

توجه کنید که $2 < \sqrt{8} < 3$

توجه کنید که $1 < \sqrt{3} < 2$



الف) $\sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{8})^2} = |\sqrt{7} - \sqrt{8}| = -(\sqrt{7} - \sqrt{8}) = -\sqrt{7} + \sqrt{8}$

ب) $\sqrt{(1 - \sqrt{10})^2} = |1 - \sqrt{10}| = -(1 - \sqrt{10}) = -1 + \sqrt{10}$

پ) $\sqrt{(-4)^2} + |-6| + |-1| = |-4| + 6 + 1 = 4 + 6 + 1 = 11$

ت) $\sqrt{(\sqrt{10} - 4)^2} = |\sqrt{10} - 4| = -(\sqrt{10} - 4) = -\sqrt{10} + 4$

ث) $|3 - \sqrt{13}| + \sqrt{(\sqrt{13} - 6)^2} = -(3 - \sqrt{13}) + |\sqrt{13} - 6|$

$= -(3 - \sqrt{13}) + (-(\sqrt{13} - 6)) = -3 + \sqrt{13} - \sqrt{13} + 6 = 3$

توجه کنید که $3 < \sqrt{10} < 4$

توجه کنید که $3 < \sqrt{10} < 4$

توجه کنید که $3 < \sqrt{13} < 4$

۶

الف) $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2} = |1-\sqrt{5}| = -(1-\sqrt{5}) = -1+\sqrt{5}$

توجه کنید که $2 < \sqrt{5} < 3$

ب)

۱) $N \cup Z = Z$

۲) $R \cap Q = Q$

الف

۷

۱) $(-\frac{3}{4} + \frac{1}{6}) \div \frac{7}{6} = (-\frac{9}{12} + \frac{2}{12}) \div \frac{7}{6} = (-\frac{7}{12}) \div \frac{7}{6} = -\frac{1}{2}$

۲) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = -(2-\sqrt{5}) = -2+\sqrt{5}$

توجه کنید که $2 < \sqrt{5} < 3$



۸

الف) $|2-\sqrt{3}| + |-1-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3} - (-1-\sqrt{3}) = 2-\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} = 3$

توجه کنید که $1 < \sqrt{3} < 2$



۹

الف) $|5-\sqrt{5}| + |-5| = 5-\sqrt{5} + 5 = 10-\sqrt{5}$

توجه کنید که $2 < \sqrt{5} < 3$

ب) $\sqrt{(-1-\sqrt{3})^2} = |-1-\sqrt{3}| = -(-1-\sqrt{3}) = 1+\sqrt{3}$

۱۰

الف) $\frac{6}{11} = 0.545454... = 0.\overline{54}$



ب) $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2} = |2-\sqrt{7}| = -(2-\sqrt{7}) = -2+\sqrt{7}$

توجه کنید که $2 < \sqrt{7} < 3$

۱۱

الف)
$$\begin{cases} \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12} = \frac{17}{12} \\ \frac{2}{2} = \frac{17}{12} = \frac{17}{12} \\ \frac{2}{3} + \frac{17}{24} = \frac{16}{24} + \frac{17}{24} = \frac{33}{24} = \frac{11}{8} \\ \frac{3}{2} = \frac{11}{8} = \frac{11}{8} \end{cases}$$

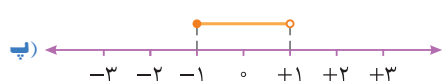
ب) $|2-2\sqrt{3}| = -(2-2\sqrt{3}) = -2+2\sqrt{3}$

توجه کنید که $1 < \sqrt{3} < 2$

۱۲

الف) $1 < 2 < 3 < 4 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$

ب) $\sqrt{(-4-\sqrt{3})^2} = |-4-\sqrt{3}| = -(-4-\sqrt{3}) = 4+\sqrt{3}$





$$4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{8} < 3$$

$$\sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{8} < \sqrt{12}$$

الف) $2 < \sqrt{5} < 3, \quad 3 < \sqrt{11} < 4 \Rightarrow \sqrt{5} < 3 < \sqrt{11}$

$$\sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{11}$$

ب) $\sqrt{(\sqrt{34}-7)^2} = |\sqrt{34}-7| = -(\sqrt{34}-7) = -\sqrt{34}+7$

توجه کنید که $\sqrt{6}$ و $\sqrt{7}$ اعدادی گنگ هستند

توجه کنید که $5 < \sqrt{34} < 6$

الف) $9 < 10 < 11 < 12 \Rightarrow 3 < \sqrt{10} < \sqrt{11} < \sqrt{12}$

ب) $\{x | x \in \mathbb{R}, x \geq -1\}$

پ) $|1-\sqrt{5}| + |1+\sqrt{5}| = -(1-\sqrt{5}) + (1+\sqrt{5}) = -1+\sqrt{5}+1+\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

توجه کنید که $2 < \sqrt{5} < 3$

الف) $4 < 5 < 6 < 7 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{7}$

ب) $|a+b| + |bc| = |-1+5| + |5 \times (-2)| = |4| + |-10| = 4+10=14$

الف) $2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow -1+2 < -1+\sqrt{5} < -1+3 \Rightarrow 1 < -1+\sqrt{5} < 2$

ب) $\sqrt{(\sqrt{7}-5)^2} = |\sqrt{7}-5| = -(\sqrt{7}-5) = -\sqrt{7}+5$

توجه کنید که $2 < \sqrt{5} < 3$

الف) $1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow -2 < -\sqrt{3} < -1 \Rightarrow 3-2 < 3-\sqrt{3} < 3-1 \Rightarrow 1 < 3-\sqrt{3} < 2$

ب) $|3-\sqrt{5}| + |-\sqrt{5}| = 3-\sqrt{5}+\sqrt{5}=3$



توجه کنید که $2 < \sqrt{5} < 3$

الف) $2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow 2-1 < \sqrt{5}-1 < 3-1 \Rightarrow 1 < \sqrt{5}-1 < 2$

ب) $|\sqrt{8}-4| + \sqrt{8} = -(\sqrt{8}-4) + \sqrt{8} = -\sqrt{8}+4+\sqrt{8}=4$

توجه کنید که $2 < \sqrt{8} < 3$

الف) $\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2} = |\sqrt{7}-3| = -(\sqrt{7}-3) = -\sqrt{7}+3$

توجه کنید که $2 < \sqrt{7} < 3$

ب) $4 < \sqrt{17} < 5 \Rightarrow 4-3 < \sqrt{17}-3 < 5-3 \Rightarrow 1 < \sqrt{17}-3 < 2$

$|b-a| + |a| = |-4-3| + |3| = |-7| + 3 = 7+3=10$

۱۳

۱۴

۱۵

۱۶

۱۷

۱۸

۱۹

۲۰

۲۱

۲۲

۲۳

الف)

$$۱) \frac{5}{18} = \frac{5}{2 \times 3 \times 3} \text{ (متناوب)}$$

$$ب) A = \{x | x \in \mathbb{R}, 1 \leq x < 3\}$$

$$۲) \frac{6}{15} = \frac{3 \times 2}{5 \times 3} = \frac{2}{5} \text{ (مختوم)}$$

$$پ) a + |a| = -3 + |-3| = -3 + 3 = 0$$

۲۴

$$الف) |3a - 2b| = |3 \times (-\frac{2}{3}) - 2 \times 5| = |-2 - 10| = |-12| = 12$$

$$ب) \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{5} < 3$$

۲۵

$$الف) -1 - \frac{1}{-1 - \frac{1}{2}} = -1 - \frac{1}{-\frac{2}{2} - \frac{1}{2}} = -1 - \frac{1}{-\frac{3}{2}} = -1 - \frac{2}{-3} = -1 + \frac{2}{3} = \frac{-3 + 2}{3} = \frac{-1}{3}$$

ب)

$$۱) |a + b| = -(a + b) = -a - b$$

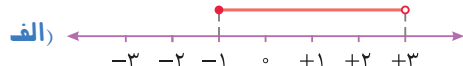
توجه کنید که $a + b < 0$

$$۲) |ab| = ab$$

توجه کنید که $ab > 0$

۲۶ باید ساده شده کسر $\frac{a}{24} = \frac{a}{8 \times 3}$ ، عامل ۳ در مخرج نداشته باشد. بنابراین $a = 12$.

۲۷



ب) چون بی‌نهایت عدد گویا بین ۱ و ۲ موجود است و همه اعداد بین ۱ و ۲ گویا نیستند.

۲۸ مجموعه A شامل اعداد طبیعی بین ۱ و ۶ است، اما مجموعه B شامل اعداد گویای بین ۱ و ۶ است. علاوه بر این مجموعه A دارای ۴ عضو است، اما تعداد اعضای مجموعه B بی‌نهایت است.

۲۹

$$|a - b| \geq |a| - |b|$$

۳۰

$$الف) \sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} - \sqrt{10} = |3 - \sqrt{10}| - \sqrt{10} \\ = -(3 - \sqrt{10}) - \sqrt{10} = -3 + \sqrt{10} - \sqrt{10} = -3$$

توجه کنید که $3 < \sqrt{10} < 4$

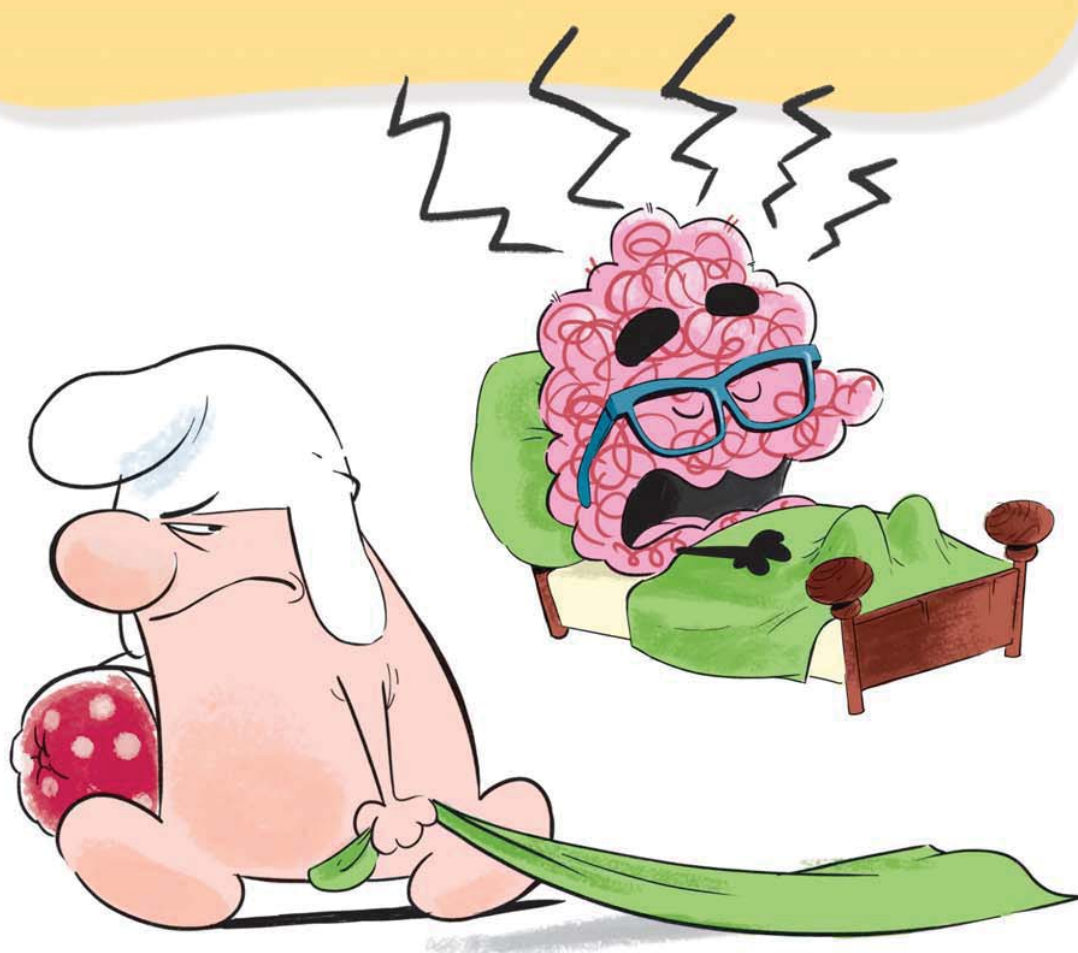
ب)

$$۱) 3/\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$$

$$۲) \mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{Z}$$

فصل سوم

استدلال و اثبات در هندسه



درس اول: استدلال



تمرین

درست یا نادرست

(پ) ✓

(ب) ✓

(الف) ✓

کامل کنید

(پ) ترسیم و شهود

(ب) مثال نقض

(الف) دانسته‌های قبلی

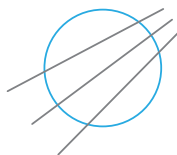
تمرین‌های تشریحی

۱) مسعود اشتباه می‌کند.

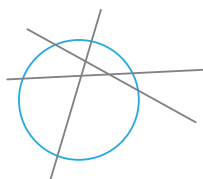
۲) استدلال حسن نادرست است. زیرا باخت تیم ملی ایران در پنج مسابقه قبلی دلیلی بر باخت در مسابقه بعد نیست.

۳) ایلیا اشتباه می‌کند. مثال نقض $a = \frac{1}{4}$ و $b = -\frac{1}{4}$ را در نظر بگیرید.

۴) مجید اشتباه می‌کند. مثال نقض:

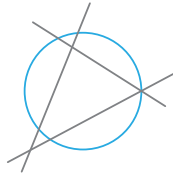


۵) امین اشتباه می‌کند. مثال نقض زیر را در نظر بگیرید که در آن با سه برش مستقیم یک به هفت تکه تقسیم شده است.

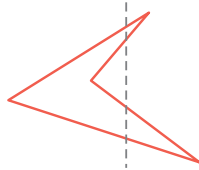




۶ حبیب اشتباه می‌کند. مثال نقض:



۷ زهرا اشتباه می‌کند. مثال نقض ادعای او شکل زیر است.



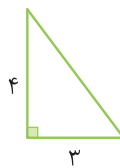
۸ مینو اشتباه می‌کند. مثال نقض:



۹ سیاوش اشتباه می‌کند. مثال نقض:



۱۰ مهرنوش اشتباه می‌کند. مثال نقض: مثلث قائم‌الزاویه مقابل خط تقارن ندارد.



درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه



تمرین

درست یا نادرست

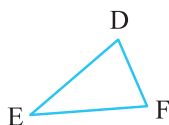
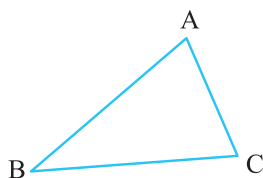
(پ) ✓

(ب) ✓

(الف) ✓

کامل کنید
(ب) فرض (الف) حکم

تمرین‌های تشریحی



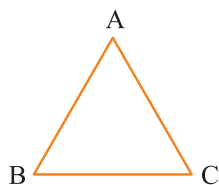
فرض: $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$

حکم: $\hat{C} = \hat{F}$

اثبات: چون مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است، پس:

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{D} + \hat{E} + \hat{F} \xrightarrow{\text{فرض}} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{F}$$

بنابراین $\hat{C} = \hat{F}$



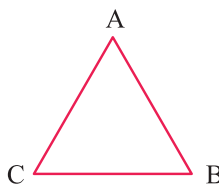
مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است: فرض

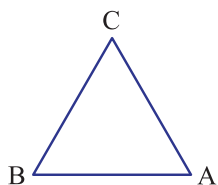
حکم: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$

$$AB = AC = BC$$

چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، داریم:

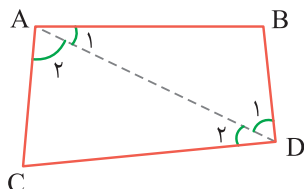
فرض کنید مثلث ACB یک نسخه از مثلث ABC باشد. توجه کنید که مثلث‌های ABC و ACB به حالت (ضضض) هم‌نهشت هستند. بنابراین زاویه‌های متناظرشان با هم برابرند، در نتیجه $\hat{B} = \hat{C}$ (۱).





اکنون فرض کنید مثلث CBA یک نسخه از مثلث ABC باشد. مثلث‌های ABC و CBA به حالت (ضضض) هم‌نهشت هستند. بنابراین زاویه‌های متناظرشان با هم برابرند، در نتیجه $\hat{B} = \hat{A}$ (۲).
 $(۱), (۲) \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$

۳



ABCD چهارضلعی محدب است : فرض

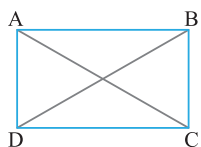
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$$

قطر AD را رسم می‌کنیم. چون مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث برابر 180° است، پس:

$$\triangle ABD: \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{D}_1 = 180^\circ, \quad \triangle ACD: \hat{A}_2 + \hat{C} + \hat{D}_2 = 180^\circ$$

بنابراین

$$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{D}_1 + \hat{A}_2 + \hat{C} + \hat{D}_2 = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$



۴ مستطیل ABCD را در نظر بگیرید و قطرهای AC و BD را در آن رسم کنید. توجه کنید که

در مثلث‌های ABD و BAC، $AD = BC$ ، $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ (مشترک)، $AB = AB$ (مشترک). بنابراین مثلث‌های ABD و BAC به حالت (ضضض) هم‌نهشت‌اند. در نتیجه $AC = BD$.

۵ فرض می‌کنیم AD نیمساز زاویه رأس در مثلث متساوی‌الساقین ABC باشد. در این صورت در مثلث‌های ABD و ACD،

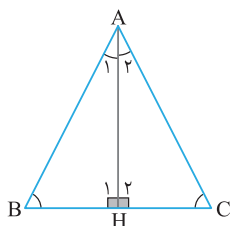
$$AB = AC, \quad \hat{A}_1 = \hat{A}_2, \quad AD = AD \text{ (مشترک)}$$

بنابراین مثلث‌های ABD و ACD به حالت (ضضض) هم‌نهشت‌اند. در نتیجه $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$.

اکنون توجه کنید که

$$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 + \hat{D}_1 = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{D}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 = 90^\circ$$

۶



فرض: $\hat{B} = \hat{C}$

$\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است : حکم

از رأس A ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم. در این صورت

$$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{B} = 90^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{C} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B} = \hat{A}_2 + \hat{C} \xrightarrow{\hat{B} = \hat{C}} \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

اکنون ثابت می‌کنیم دو مثلث AHB و AHC هم‌نهشت‌اند.

$$\begin{cases} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ \text{AH: مشترک} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{(ضضز)}} \triangle AHB \cong \triangle AHC$$

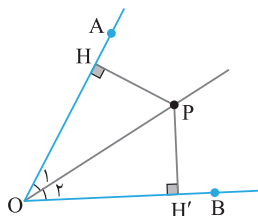
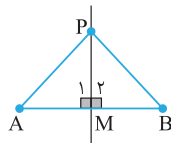
اجزای متناظر: $AB = AC$

بنابراین مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

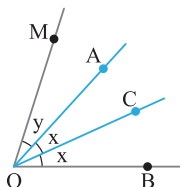
(۷) پاره خط AB را در نظر بگیرید. فرض کنید فاصله P از دو سر این پاره خط برابر باشد. از نقطه P به وسط پاره خط AB (نقطه M) وصل کنید. توجه کنید که در مثلث های AMP و BMP، $AM=BM$ ، $PM=PM$ (مشترک) و $AP=BP$ (فرض). بنابراین مثلث های AMP و BMP به حالت (ض ض ض) هم نهشت اند. در نتیجه $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$. اکنون توجه کنید که

$$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_1 = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{M}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{M}_1 = 90^\circ$$

بنابراین پاره خط PM از وسط پاره خط AB می گذرد و بر آن عمود است. در نتیجه نقطه P روی عمود منصف پاره خط AB است.



(۸) زاویه AOB را در نظر بگیرید و فرض کنید P نقطه ای درون این زاویه باشد که فاصله اش از دو ضلع زاویه برابر است (شکل روبه رو را ببینید). توجه کنید که مثلث های قائم الزاویه OHP و OH'P به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه هم نهشت اند. بنابراین $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. یعنی خط OP نیمساز زاویه AOB است.



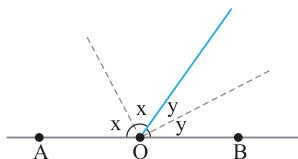
(۹) فرض می کنیم $\hat{AOC} = \hat{COB} = x$ و $\hat{AOM} = y$. در این صورت

$$\frac{\hat{AOM} + \hat{BOM}}{2} = \frac{y + (2x + y)}{2} = \frac{2x + 2y}{2} = x + y = \hat{MOC}$$

(۱۰) نیمسازهای زاویه های O_1 و O_2 را رسم کرده ایم (شکل مقابل را ببینید). در این صورت $\hat{O}_1 = 2x$ و $\hat{O}_2 = 2y$. اکنون توجه کنید که

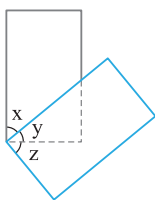
$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ \Rightarrow 2x + 2y = 180^\circ \Rightarrow x + y = 90^\circ$$

بنابراین زاویه بین نیمسازها برابر 90° است، یعنی این نیمسازها بر هم عمودند.





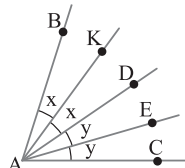
تمرین‌های ویژه



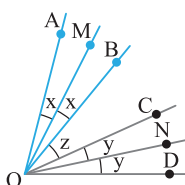
$$x + y = 90^\circ, \quad y + z = 90^\circ$$

۱ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

از این تساوی‌ها نتیجه می‌شود $x + y = y + z$ پس $x = z$.



۲ چون $\widehat{BAK} = \widehat{KAD} = x$ است، پس $\widehat{BAD}$ نیمساز زاویه $\widehat{CAD}$ است، پس $\widehat{DAE} = \widehat{EAC} = y$. اکنون توجه کنید که $\widehat{BAC} = 2x + 2y = 2(x + y) = 2\widehat{KAE}$.

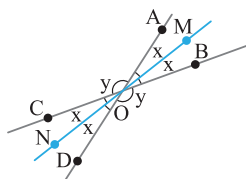


۳ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

$$\widehat{MON} = \widehat{AOC} \Rightarrow x + z + y = x + x + z \Rightarrow y = x$$

بنابراین

$$\widehat{AOC} = 2x + z = 2y + z = \widehat{BOD}$$



۴ فرض کنید $\widehat{AOB}$ و $\widehat{COD}$ دو زاویه متقابل به رأس باشند. نیمسازهای این دو زاویه را رسم می‌کنیم (شکل روبه‌رو را ببینید). توجه کنید که چون دو زاویه متقابل به رأس برابرند، پس نصف آن‌ها هم برابر است. با توجه به شکل،

$$2y + 4x = 360^\circ \Rightarrow y + 2x = 180^\circ$$

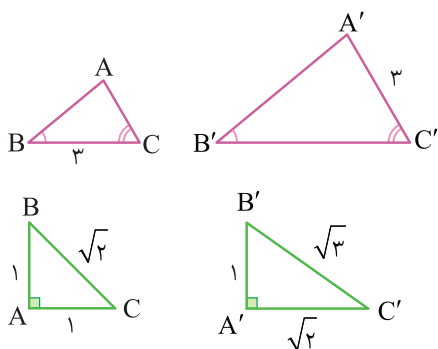
بنابراین $\widehat{MON} = 180^\circ$ ، یعنی نقطه‌های M ، O و N روی یک خط راست هستند.

درس سوم: هم‌نهشتی مثلث‌ها



تمرین

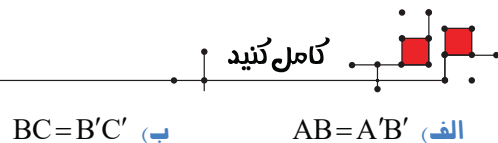
درست یا نادرست



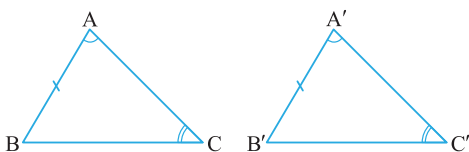
الف) نادرست. به عنوان مثال نقض دو مثلث روبه‌رو را در نظر بگیرید. توجه کنید که $\hat{B} = \hat{B}'$ ، $\hat{C} = \hat{C}'$ و $BC = A'C'$ اما این دو مثلث هم‌نهشت نیستند.

ب) نادرست. به عنوان مثال نقض دو مثلث روبه‌رو را در نظر بگیرید. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ دارای دو ضلع و یک زاویه برابر هستند، اما با هم هم‌نهشت نیستند.

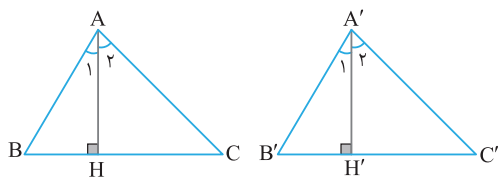
پ) درست



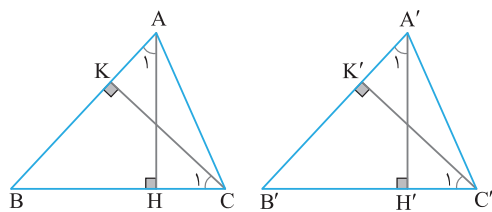
تمرین‌های تشریحی



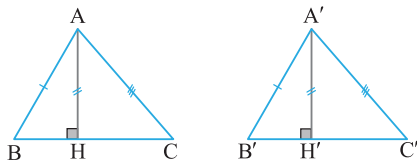
۱) طبق فرض مسئله می‌دانیم $\hat{A} = \hat{A}'$ و $\hat{C} = \hat{C}'$ پس $\hat{B} = \hat{B}'$. اکنون توجه کنید که در مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ $\hat{A} = \hat{A}'$ ، $\hat{B} = \hat{B}'$ (فرض)، $\hat{C} = \hat{C}'$ (فرض) و $AB = A'B'$ (فرض). بنابراین مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ به حالت (ض‌ض‌ز) هم‌نهشت‌اند.



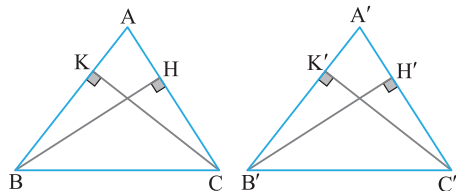
۲) با توجه به شکل روبه‌رو، از $\hat{B} = \hat{B}'$ نتیجه می‌شود که $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$ و از $\hat{C} = \hat{C}'$ هم نتیجه می‌گیریم که $\hat{A}_2 = \hat{A}'_2$. بنابراین مثلث‌های ABH و $A'B'H'$ و همچنین مثلث‌های ACH و $A'C'H'$ به حالت (ض‌ض‌ز) هم‌نهشت هستند. پس $AB = A'B'$ و $AC = A'C'$. از طرف دیگر، $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}'_1 + \hat{A}'_2$ پس $\hat{A} = \hat{A}'$. بنابراین مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند.



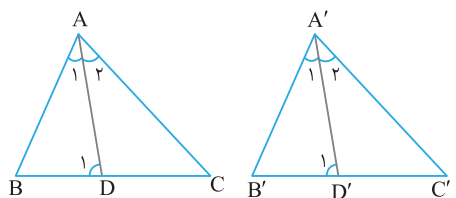
با توجه به شکل زیر، در مثلث‌های ABH و $A'B'H'$ ، چون $\hat{B} = \hat{B}'$ پس $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$ می‌دانیم $AH = A'H'$ و $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$ بنابراین مثلث‌های ABH و $A'B'H'$ به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، پس $AB = A'B'$ به طریق مشابه مثلث‌های BCK و $B'C'K'$ نیز به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت می‌شوند، در نتیجه $BC = B'C'$. اکنون توجه کنید که در مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ ، $AB = A'B'$ ، $\hat{B} = \hat{B}'$ و $BC = B'C'$ ، بنابراین مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند.



ابتدا توجه کنید که مثلث‌های ABH و $A'B'H'$ و همچنین مثلث‌های ACH و $A'C'H'$ به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه هم‌نهشت‌اند. بنابراین $BH = B'H'$ و $CH = C'H'$ پس $BC = B'C'$. اکنون توجه کنید که در مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ ، $AB = A'B'$ ، $\hat{A} = \hat{A}'$ و $AC = A'C'$ ، بنابراین مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند.

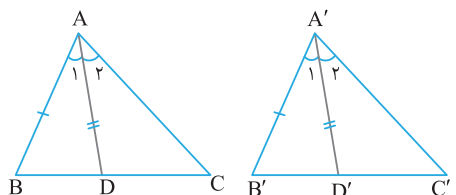


طبق فرض مسئله می‌دانیم مثلث‌های BCH و $B'C'H'$ و همچنین مثلث‌های BCK و $B'C'K'$ به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه هم‌نهشت‌اند، در نتیجه $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{C} = \hat{C}'$ از برابری این دو زاویه و $BC = B'C'$ (فرض) نتیجه می‌شود مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند.

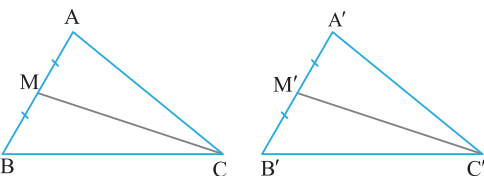


چون $\hat{A} = \hat{A}'$ پس $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$ در مثلث‌های ABD و $A'B'D'$ ،

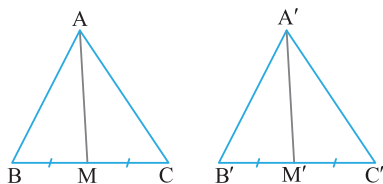
$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}'_1 \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{cases} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}'_1$$
 اکنون از تساوی‌های $\hat{D}_1 = \hat{D}'_1$ ، $AD = A'D'$ (فرض) و $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$ نتیجه می‌شود که مثلث‌های ABD و $A'B'D'$ به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، در نتیجه $AB = A'B'$ ، $\hat{A} = \hat{A}'$ ، $\hat{B} = \hat{B}'$ و $A'B'C'$ پس این دو مثلث به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند.



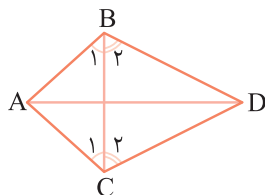
چون $\hat{A} = \hat{A}'$ و $AD = A'D'$ و $A'D'$ نیمساز هستند، پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}'_1 = \hat{A}'_2$ در مثلث‌های ABD و $A'B'D'$ ، می‌توان نوشت $AB = A'B'$ (فرض)، $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$ و $AD = A'D'$ (فرض)، بنابراین مثلث‌های ABD و $A'B'D'$ به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، در نتیجه $\hat{B} = \hat{B}'$. اکنون توجه کنید که در مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ ، می‌دانیم $\hat{A} = \hat{A}'$ (فرض)، $AB = A'B'$ (فرض) و $\hat{B} = \hat{B}'$ ، بنابراین مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند.



چون $AB = A'B'$ ، بنابراین $AM = A'M'$ ، اکنون در مثلث‌های ACM و $A'C'M'$ ، می‌توان نوشت $AC = A'C'$ (فرض)، $CM = C'M'$ (فرض)، بنابراین مثلث‌های ACM و $A'C'M'$ به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند و در نتیجه $\hat{A} = \hat{A}'$. در مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ ، $AB = A'B'$ (فرض)، $\hat{A} = \hat{A}'$ و $AC = A'C'$ (فرض)، پس این دو مثلث به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند.



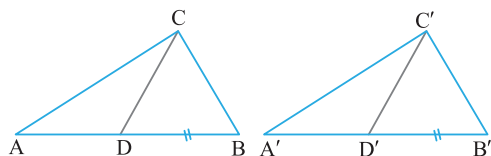
۹ چون $BC=B'C'$ پس $MC=M'C'$. در مثلث‌های AMC و $A'M'C'$ می‌دانیم $AM=A'M'$ (فرض)، $\hat{AMC}=\hat{A'M'C'}$ (فرض) و $MC=M'C'$ ، بنابراین مثلث‌های AMC و $A'M'C'$ به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، در نتیجه $\hat{C}=\hat{C'}$ و $AC=A'C'$. اکنون از تساوی‌های $AC=A'C'$ ، $\hat{C}=\hat{C'}$ و $BC=B'C'$ (فرض) نتیجه می‌شود مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند.



۱۰ در مثلث ABC چون $\hat{B}_1=\hat{C}_1$ پس $AB=AC$. در مثلث BCD چون $\hat{B}_2=\hat{C}_2$ پس $BC=CD$. از طرف دیگر داریم

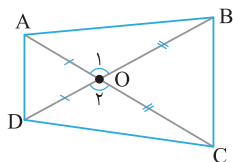
$$\hat{B}=\hat{B}_1+\hat{B}_2=\hat{C}_1+\hat{C}_2=\hat{C}$$

بنابراین مثلث‌های ABD و ACD به حالت (ض‌ض‌ض) با هم هم‌نهشت‌اند.

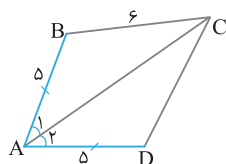


۱۱ از هم‌نهشتی مثلث‌های ADC و $A'D'C'$ نتیجه می‌شود $AD=A'D'$ ، $\hat{A}=\hat{A'}$ ، $AC=A'C'$ اکنون توجه کنید که
$$\begin{cases} AD=A'D' \\ BD=B'D' \text{ (فرض)} \end{cases} \Rightarrow AB=A'B'$$

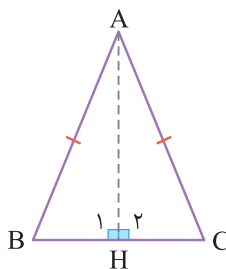
پس در مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ ، $\hat{A}=\hat{A'}$ ، $AC=A'C'$ ، $AB=A'B'$ پس این دو مثلث به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند.



۱۲ با توجه به شکل مقابل، در مثلث‌های ABO و DCO ، $AO=DO$ (فرض)، $BO=CO$ (فرض) و $\hat{O}_1=\hat{O}_2$ (متقابل به رأس)، بنابراین مثلث‌های ABO و DCO به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، در نتیجه $AB=CD$.



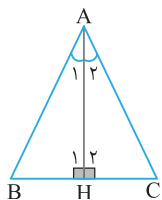
۱۳ با توجه به شکل مقابل $AB=AD=5$ ، $AC=AC$ (مشترک) و $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ (فرض)، پس مثلث‌های ABC و ADC به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، در نتیجه $CD=CB=6$. بنابراین محیط چهارضلعی $ABCD$ برابر است با $5+5+6+6=22$.



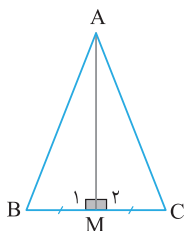
۱۴ در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ثابت می‌کنیم مثلث‌های AHB و AHC با هم هم‌نهشت‌اند.

$$\begin{cases} AB=AC \\ AH: \text{مشترک} \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{وض}} \triangle AHB \cong \triangle AHC$$

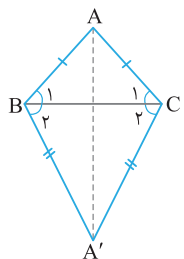
AH میانه هم است $\Rightarrow BH=CH$: اجزای متناظر



۱۵ طبق فرض مسئله، در شکل رسم شده، AH ارتفاع و نیمساز زاویه A در مثلث ABC است. در مثلث‌های ABH و AHC ، $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و $\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ$ و $AH=AH$ (مشترک)، بنابراین مثلث‌های ABH و AHC به حالت (ض‌ض‌ز) هم‌نهشت‌اند، در نتیجه $AB=AC$.



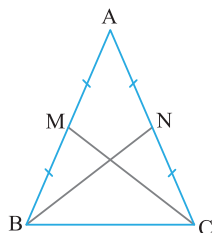
۱۶ در مثلث ABC ، AM میانه و ارتفاع است. در مثلث‌های ABM و ACM ، $BM = CM$ (فرض)، $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$ (فرض)، و $AM = AM$ (مشترک)، بنابراین مثلث‌های ABM و ACM به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، در نتیجه $AB = AC$.



۱۷ در مثلث‌های متساوی‌الساقین ABC و $A'BC$ می‌دانیم $AB = AC$ ، $A'B = A'C$ ، $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ ، $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$ پس $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2$ یعنی $\hat{A}BA' = \hat{A}CA'$. با توجه به تساوی‌های به‌دست آمده، مثلث‌های ABA' و ACA' به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند.

تمرین‌های ویژه

۱ چون $\hat{B}YX = \hat{C}YX$ ، پس مکمل‌های این زاویه‌ها با هم برابرند، یعنی $\hat{B}YA = \hat{C}YA$. اکنون توجه کنید که در مثلث‌های ABY و ACY ، $\hat{B}AY = \hat{C}AY$ (فرض)، $AY = AY$ (مشترک)، $\hat{B}YA = \hat{C}YA$ ، بنابراین مثلث‌های ABY و ACY به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، در نتیجه $AB = AC$. پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

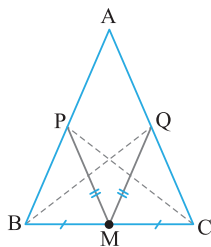
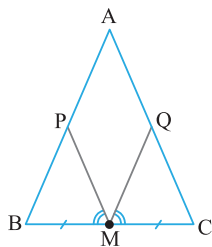


۲ در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، می‌دانیم $AB = AC$ ، پس $BM = CN$ و همچنین $\hat{B} = \hat{C}$. در مثلث‌های BCM و CBN ، $\hat{B} = \hat{C}$ ، $BM = CN$ و $BC = BC$ (مشترک)، بنابراین مثلث‌های BCM و CBN به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، در نتیجه $BN = CM$.

۳ چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس $\hat{B} = \hat{C}$. در مثلث‌های BPM و CQM ، $\hat{B} = \hat{C}$ ، $BM = CM$ (فرض) و $\hat{PMB} = \hat{QMC}$ (فرض)، بنابراین مثلث‌های BPM و CQM به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند. در نتیجه $PM = QM$. اکنون توجه کنید که

$$\hat{BMP} = \hat{CMQ} \Rightarrow 180^\circ - \hat{BMP} = 180^\circ - \hat{CMQ} \Rightarrow \hat{CMP} = \hat{BMQ}$$

در مثلث‌های BMQ و CMP ، $BM = CM$ (فرض)، $\hat{BMQ} = \hat{CMP}$ و $MQ = MP$ ، بنابراین مثلث‌های BMQ و CMP به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند. در نتیجه $BQ = CP$.



درس چهارم: حل مسئله در هندسه

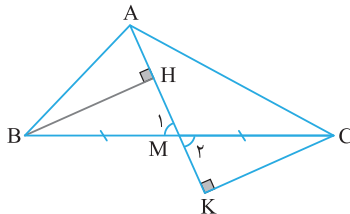


تمرین

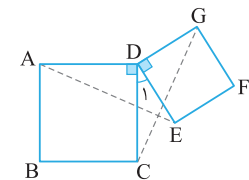
تمرین‌های تشریحی

(۱) چون $AB=BC$ و $AE=CF$ ، پس $BE=BF$. در مثلث‌های ABF و CBE ، $AB=BC$ (فرض) و $\hat{B}=\hat{B}$ (مشترک) و $BF=BE$. بنابراین مثلث‌های ABF و CBE به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، در نتیجه $\hat{A}=\hat{C}$.

(۲) ابتدا توجه کنید که مثلث‌های ABD و DCA به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، چون $AB=CD$ (فرض)، $BD=AC$ (فرض) و $AD=AD$ (مشترک). در نتیجه $\hat{A}_1=\hat{D}_1$.
بنابراین مثلث AOD متساوی‌الساقین است و $AO=DO$.

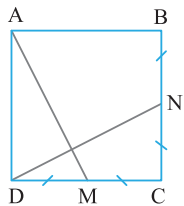


(۳) با توجه به شکل زیر، در مثلث‌های قائم‌الزاویه BMH و CMK ، $BM=CM$ (فرض) و $\hat{M}_1=\hat{M}_2$ (متقابل به رأس)، پس این دو مثلث به حالت وتر و یک زاویه تند، هم‌نهشت‌اند، در نتیجه $BH=CK$.

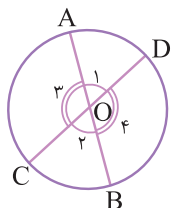


$$\hat{ADE} = 90^\circ + \hat{D}_1 = \hat{CDG}$$

اکنون در مثلث‌های ADE و CDG ، $\hat{ADE}=\hat{CDG}$ ، $DE=DG$ و $AD=CD$.
بنابراین دو مثلث به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، پس $AE=CG$.



(۵) چون ضلع‌های مربع برابرند، پس $BN=NC=CM=MD$. در مثلث‌های ADM و DCN ، $AD=CD$ ، $\hat{D}=\hat{C}=90^\circ$ و $DM=CN$ ، بنابراین دو مثلث به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، در نتیجه $AM=DN$.

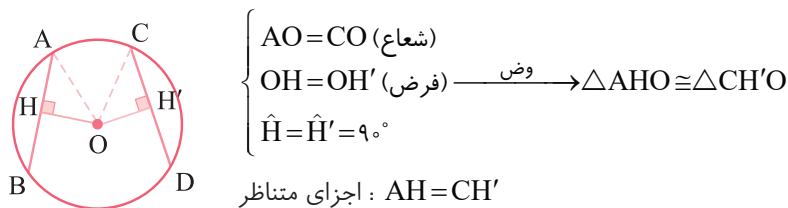


$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ (متقابل به رأس)} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \\ \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \text{ (متقابل به رأس)} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \end{cases}$$

(۶) قطرهای دایره، در مرکز دایره متقاطع‌اند.

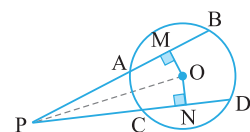


۷



از طرف دیگر خطی که از مرکز دایره بر یک وتر دایره عمود می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند. پس

$$AB = 2AH = 2CH' = CD$$



اگر دو وتر در دایره‌ای برابر باشند، فاصله مرکز دایره تا آن دو یکسان است. چون $AB=CD$

پس با توجه به شکل مقابل $OM=ON$. از طرف دیگر، اگر از مرکز دایره بر وتری عمود

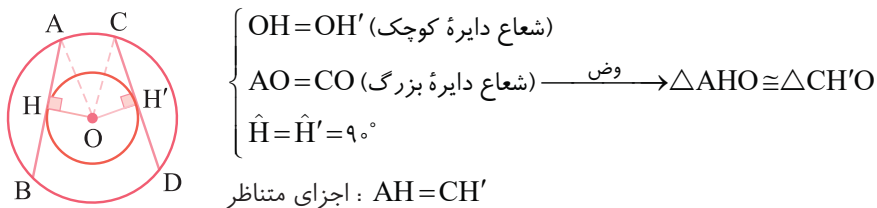
کنیم، وتر را نصف می‌کند، یعنی $AM=BM=CN=ND$.

اکنون توجه کنید که در مثلث‌های قائم‌الزاویه POM و PON، $PO=PO$ (مشترک) و $OM=ON$ ، بنابراین دو مثلث به

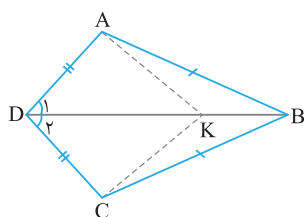
حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه، هم‌نهشت‌اند، در نتیجه $PM=PN$ ، بنابراین،

$$\left. \begin{array}{l} AM=CN \\ PM=PN \end{array} \right\} \Rightarrow PM-AM=PN-CN \Rightarrow PA=PC$$

۹



از طرف دیگر، خطی که از مرکز دایره بر یک وتر دایره عمود می‌شود، آن را نصف می‌کند. پس $AB=2AH=2CH'=CD$



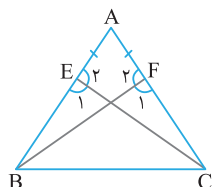
در مثلث‌های ABD و CBD می‌دانیم $AB=BC$ (فرض)، $AD=CD$ (فرض) و

$BD=BD$ (مشترک)، پس دو مثلث به حالت (ضضض) هم‌نهشت‌اند، در نتیجه

$\hat{D}_1 = \hat{D}_2$. توجه کنید که در مثلث‌های ADK و CDK، $AD=CD$ (فرض)،

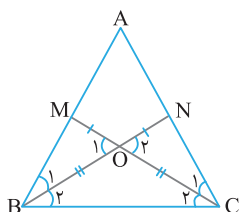
$\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ و $DK=DK$ (مشترک)، پس این دو مثلث به حالت (ضضض) هم‌نهشت‌اند و

$AK=CK$.



چون $\hat{E}_1 = \hat{F}_1$ ، پس $\hat{E}_2 = \hat{F}_2$. در مثلث‌های ACE و ABF، $AE=AF$ (فرض) و

$\hat{A} = \hat{A}$ (مشترک)، در نتیجه این دو مثلث به حالت (ضضز) هم‌نهشت‌اند، پس $BF=CE$.



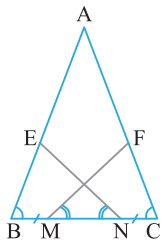
با توجه به شکل زیر، مثلث‌های OBM و OCN به حالت (ضضض) هم‌نهشت‌اند، در نتیجه

$\hat{B}_1 = \hat{C}_1$. از طرف دیگر، چون $OB=OC$ ، پس مثلث OBC متساوی‌الساقین است و

بنابراین $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$.

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

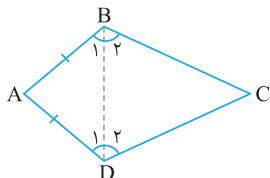
پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.



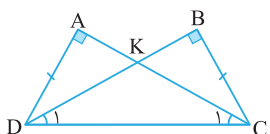
۱۳ به شکل رسم شده توجه کنید. چون $BM = CN$ ، پس $BN = CM$. در مثلث‌های BNE و CMF می‌دانیم

$$\hat{B} = \hat{C} \text{ (متساوی الساقین)}, \quad BN = CM, \quad \hat{BNE} = \hat{CMF}$$

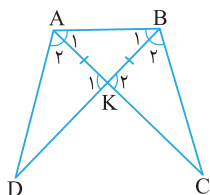
پس این دو مثلث به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند. در نتیجه $BE = CF$.



۱۴ قطر BD را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل چون مثلث ABD متساوی الساقین است، پس $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$. از طرف دیگر، طبق فرض مسئله $\hat{B} = \hat{D}$ ، در نتیجه $\hat{B}_2 = \hat{D}_2$. در مثلث BCD چون $\hat{B}_2 = \hat{D}_2$ ، پس این مثلث متساوی الساقین است و $BC = CD$.



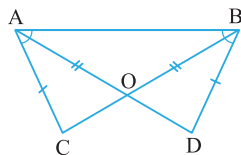
۱۵ با توجه به شکل زیر در مثلث‌های قائم‌الزاویه ACD و BDC. $AD = BC$ (فرض) و $CD = CD$ (مشترک). پس این دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه هم‌نهشت‌اند. در نتیجه $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$. در مثلث CDK چون $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$ ، پس مثلث متساوی الساقین است و $CK = DK$.



۱۶ در مثلث متساوی الساقین KAB چون $AK = BK$ ، پس $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$. چون $\hat{A} = \hat{B}$ ، پس $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$. در مثلث‌های ADK و BCK می‌دانیم

$$\hat{A}_2 = \hat{B}_2, \quad AK = BK \text{ (فرض)}, \quad \hat{K}_1 = \hat{K}_2 \text{ (مقابل به رأس)}$$

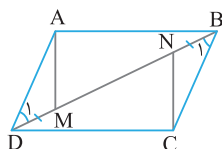
پس این دو مثلث به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند و $CK = DK$.



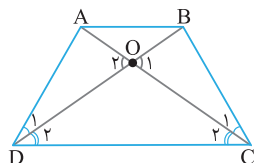
۱۷ در مثلث‌های ABC و BAD می‌دانیم $AB = AB$ (مشترک)، $\hat{CAB} = \hat{DBA}$ (فرض)، $AC = BD$ (فرض)

پس این دو مثلث به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند و در نتیجه $BC = AD$. بنابراین

$$\begin{cases} OB = OA \text{ (فرض)} \\ BC = AD \end{cases} \Rightarrow BC - OB = AD - OA \Rightarrow CO = DO$$



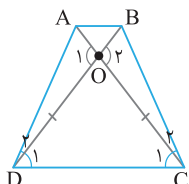
۱۸ در متوازی‌الاضلاع ABCD، اضلاع مقابل برابرند، پس $AD = BC$. همچنین طبق قضیه خطوط موازی و مورب، $\hat{D}_1 = \hat{B}_1$. در مثلث‌های ADM و CBN. $AD = BC$ ، $\hat{D}_1 = \hat{B}_1$ و $DM = BN$ (فرض). پس این دو مثلث به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند و در نتیجه $AM = CN$.



۱۹ چون $\hat{C}_2 = \hat{D}_2$ ، پس مثلث OCD متساوی الساقین است. یعنی $OC = OD$. در مثلث‌های OBC و OAD

$$OD = OC, \quad \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \text{ (فرض)}, \quad \hat{O}_2 = \hat{O}_1 \text{ (مقابل به رأس)}$$

پس این دو مثلث به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند. در نتیجه $AD = BC$.



۲۰ چون $OC = OD$ ، پس مثلث OCD متساوی الساقین است و $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$. در نتیجه

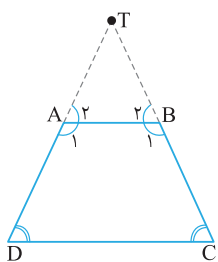
$$\hat{C} - \hat{C}_1 = \hat{D} - \hat{D}_1 \Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{D}_2$$

در مثلث‌های OBC و OAD. $\hat{C}_2 = \hat{D}_2$ ، $OC = OD$ (فرض) و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (مقابل به رأس).

پس این دو مثلث به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند. در نتیجه $AD = BC$.

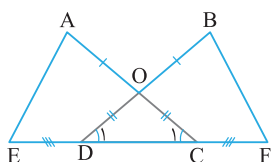


تمرین‌های ویژه



۱ ابتدا دو ضلع AD و BC را امتداد می‌دهیم تا در T با یکدیگر برخورد کنند. توجه کنید که چون $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (فرض)، پس $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$. در نتیجه مثلث‌های ABT و CDT متساوی‌الساقین می‌شوند. بنابراین

$$\begin{cases} AT = BT \\ DT = CT \end{cases} \Rightarrow DT - AT = CT - BT \Rightarrow AD = BC$$



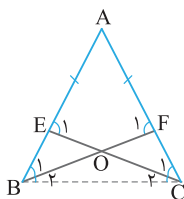
۲ ابتدا توجه کنید که مثلث OCD متساوی‌الساقین است، پس $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$. چون $DE = CF$ در نتیجه

$$DE + DC = CF + DC \Rightarrow EC = DF$$

اکنون در مثلث‌های ACE و BDF .

$$AC = BD \text{ (فرض)}, \quad \hat{C}_1 = \hat{D}_1, \quad CE = DF$$

پس این دو مثلث به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند و در نتیجه $AE = BF$.



$$\hat{A} = \hat{A} \text{ (مشترک)}, \quad AE = AF \text{ (فرض)}, \quad \hat{E}_1 = \hat{F}_1 \text{ (فرض)}$$

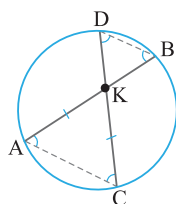
پس دو مثلث به حالت (ض‌ض‌ز) هم‌نهشت‌اند، در نتیجه $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ و $AB = AC$ چون $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$.

پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است و در آن $\hat{B} = \hat{C}$. اکنون توجه کنید که

$$\hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{C}_2$$

در مثلث BOC چون $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$ ، پس مثلث متساوی‌الساقین است و

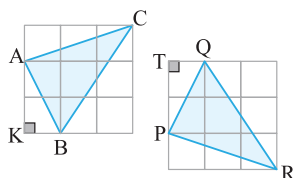
$$OB = OC$$



۴ در مثلث متساوی‌الساقین ACK ، $\hat{A} = \hat{C}$. پس $\widehat{BC} = \widehat{AD}$ (طبق اندازه زاویه محاطی در دایره).

از طرف دیگر $\hat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2}$ و $\hat{D} = \frac{\widehat{BC}}{2}$ ، در نتیجه $\hat{B} = \hat{D}$. پس در مثلث BDK ، چون $\hat{B} = \hat{D}$ ، پس

$$BK = DK \text{ بنابراین } AK + BK = CK + DK \text{ یعنی } AB = CD.$$



۵ با توجه به شکل زیر دو مثلث ABK و PQT به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، پس

$$AB = PQ \text{ به طریق مشابه به دست می‌آید } AC = PR \text{ و } BC = QR.$$

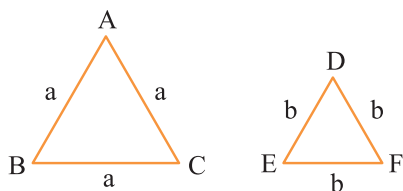
مثلث ABC و PQR به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند.

درس پنجم: شکل‌های متشابه



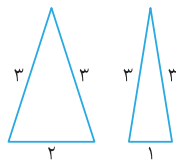
تمرین

تمرین‌های تشریحی

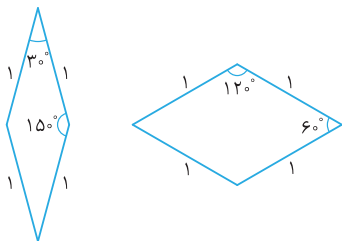


(۱) هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع متشابه‌اند. زیرا در مثلث متساوی‌الاضلاع هر زاویه برابر 60° است و اگر طول ضلع یکی برابر a و طول ضلع دیگری برابر b باشد، نسبت طول ضلع‌های مثلث اول به طول ضلع‌های مثلث دوم برابر $\frac{a}{b}$ است.

(۲) چون مثلث‌ها متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها برابر k است، پس زاویه‌های روبه‌رو به ضلع‌های با طول c و kc برابرند. یعنی $\hat{A} = \hat{C}' = 70^\circ$. به این ترتیب، $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.
(۳) الف) خیر. مثلاً مثلث‌های متساوی‌الساقین شکل زیر متشابه نیستند.



ب) بله. توجه کنید که زاویه‌های دو مثلث 45° ، 90° و 45° هستند. اگر طول ساق یکی برابر a و طول ساق دیگری برابر b باشد، آن‌گاه طول وتر آن‌ها به ترتیب $\sqrt{2}a$ و $\sqrt{2}b$ است. بنابراین نسبت ضلع‌ها نیز برابر است: $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}b}$.



پ) خیر، مثلاً لوزی‌های شکل مقابل متشابه نیستند.

(۴) فرض کنید محیط لوزی اول برابر 60 باشد. براساس اینکه نسبت تشابه چگونه است دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:
حالت اول:

$$\frac{\text{محیط لوزی اول}}{\text{محیط لوزی دوم}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{60}{\text{محیط لوزی دوم}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \text{محیط لوزی دوم} = 100 \Rightarrow \frac{\text{طول ضلع لوزی دوم}}{4} = \frac{100}{4} = 25$$



حالت دوم:

$$\frac{\text{محیط لوزی دوم}}{\text{محیط لوزی اول}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\text{محیط لوزی دوم}}{60} = \frac{3}{5} \Rightarrow \text{محیط لوزی دوم} = 36 \Rightarrow \text{طول ضلع لوزی دوم} = \frac{36}{4} = 9$$

(۵) بله. با توجه به شکل $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$. چون $\hat{C}_1$ و $\hat{C}_2$ متقابل به رأس می‌باشند، بنابراین $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$.

از طرف دیگر داریم:

$$\hat{B} + \hat{C}_1 = 90^\circ = \hat{E} + \hat{C}_2 \Rightarrow \hat{B} = \hat{E}$$

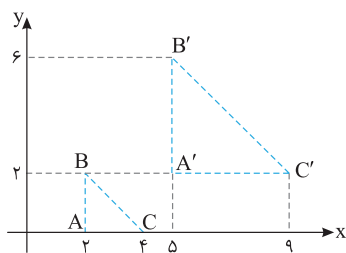
$$\triangle ABC: AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 144 + 64 = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{208}$$

$$\triangle DCE: DC^2 + DE^2 = CE^2 \Rightarrow 4 + 9 = CE^2 \Rightarrow CE = \sqrt{13}$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{12}{3} = \frac{4}{1}, \quad \frac{AC}{DC} = \frac{8}{2} = \frac{4}{1}, \quad \frac{BC}{CE} = \frac{\sqrt{208}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{16 \cdot 13}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{16}}{1} = \frac{4}{1}$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{CE} = \frac{4}{1}$$

بنابراین $\triangle ABC \sim \triangle DEC$



(۶) اگر رأس‌های مثلث‌ها را در صفحه مختصات مشخص کنیم، معلوم می‌شود که این

مثلث‌ها قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین هستند. بنابراین زاویه‌های مثلث‌ها 90° ، 45° و 45° هستند. همین‌طور $BC = 2\sqrt{2}$ و $B'C' = 4\sqrt{2}$. بنابراین

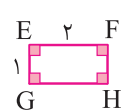
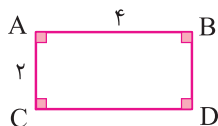
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{1}{2}$$

بنابراین مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است.

(۷)

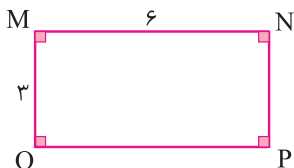
$$\text{تناسب اضلاع: } \frac{12}{8} = \frac{6}{4} = \frac{x}{6} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 9$$

(۸)



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{E} = \hat{F} = \hat{G} = \hat{H} = 90^\circ \\ \frac{AC}{EG} = \frac{AB}{EF} = \frac{BD}{FH} = \frac{CD}{GH} = \frac{2}{1} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ مستطیل‌های $ABCD$ و $EFGH$ با هم متشابه‌اند



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{M} = \hat{N} = \hat{O} = \hat{P} = 90^\circ \\ \frac{AC}{MO} = \frac{AB}{MN} = \frac{BD}{NP} = \frac{CD}{OP} = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ مستطیل‌های $ABCD$ و $MNOP$ با هم متشابه‌اند

(۹)

$$\frac{\frac{x}{2}}{1} = \frac{x+5}{3} \Rightarrow \frac{3}{2}x = x + \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 5$$

(۱۰) توجه کنید که $\frac{x+1}{4} = \frac{9}{6} = \frac{x+7}{8}$. بنابراین

$$\frac{x+1}{4} = \frac{9}{6} \Rightarrow x+1 = \frac{9}{6} \times 4 = 6 \Rightarrow x = 5$$

توجه کنید که اگر $x = 5$ ، آن گاه $\frac{9}{6} = \frac{x+7}{8}$

(۱۱) فاصله واقعی دو نقطه برابر $200000 \times 12/5 = 2500000$ سانتی متر می شود که برابر است با ۲۵ کیلومتر.

(۱۲) چون مقیاس نقشه ۱ به ۴۰۰۰ است، پس هر ۱ واحد روی نقشه معادل ۴۰۰۰ واحد در حالت واقعی است. اگر x فاصله دو نقطه مورد نظر روی نقشه باشد، داریم:

$$\frac{1}{4000} = \frac{x}{200} \Rightarrow x = \frac{200}{4000} = 0/005 \text{ کیلومتر} \Rightarrow x = 0/005 \times 1000 = 5 \text{ متر}$$

(۱۳) اگر مقیاس نقشه $1:k$ باشد، آن گاه

$$4/5 \times k = 315000 \Rightarrow k = \frac{315000}{4/5} = 70000$$

بنابراین مقیاس نقشه ۱:۷۰۰۰۰ است.



امتحان نهایی فصل سوم

۱

- الف) درست (ب) نادرست (ج) درست (د) نادرست
 ب) درست (ج) درست (د) درست
 ت) درست (ج) نادرست (د) درست

$$\frac{1}{500} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 2 \times 500 = 1000 \text{ cm} \Rightarrow x = 10 \text{ m} \quad \text{ب)}$$

۲ الف) حکم مسئله

- پ) موازی بودن ضلع‌های روبه‌رو
 ت) مشخص نبوده است.
 ج) برابر - متناسب
 خ) نسبت تشابه
 ذ) منتظم
 ت) فرض‌های مسئله
 ج) یک
 ج) اثبات
 د) مقیاس
 ز) اثبات

$$\frac{x}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{16}{8} = 2 \quad \text{ب) گزینه (۳)}$$

۳ الف) گزینه (۴)

$$\frac{1}{1000} = \frac{2/5}{x} \Rightarrow x = 2500 \text{ cm} \quad \text{ت) گزینه (۲)}$$

$$\frac{1}{100} = \frac{x}{400} \Rightarrow x = 4 \text{ cm} \quad \text{پ) گزینه (۲)}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1/5}{x} \Rightarrow x = 4/5 \text{ cm} \quad \text{ج) گزینه (۲)}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{21} \Rightarrow x = 14 \text{ cm} \quad \text{ت) گزینه (۴)}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad \text{ج) گزینه (۴)}$$

ج) گزینه (۲)

$$\frac{3}{5} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = 25, \quad \frac{3}{5} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = 9 \quad \text{خ) گزینه (۴)}$$

د) گزینه (۲)

۴ خیر، چون اثبات فقط حالتی را در نظر گرفته است که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، در حالی که حکم برای هر مثلث است.

۵

$$\text{فرض: } \begin{cases} AB = AC \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases}$$

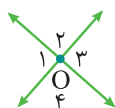
حکم: $BD = DC$

$$\text{فرض: } BH = CH'$$

حکم: $AB = AC$

۶

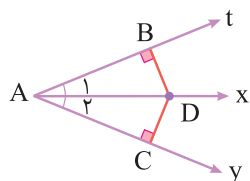
۷



$$\text{فرض: } \begin{cases} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180^\circ \\ \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 180^\circ \end{cases} \quad \text{حکم: } \begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_3 \\ \hat{O}_2 = \hat{O}_4 \end{cases}$$

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ = \hat{O}_2 + \hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

$$\hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180^\circ = \hat{O}_3 + \hat{O}_4 \Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{O}_4$$



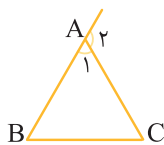
$$\text{فرض: } \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

$$\text{حکم: } DB = DC$$

از نقطه D، ارتفاعهای DB و DC را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (AD نیمساز } \hat{A} \text{)} \\ AD \text{ (مستترک)} \\ \hat{B} = \hat{C} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{وز}} \triangle ABD \cong \triangle ACD$$

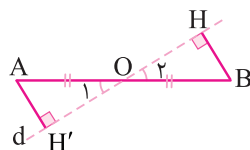
$$\text{اجزای متناظر: } DB = DC$$



$$\text{فرض: } \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ$$

$$\text{حکم: } \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

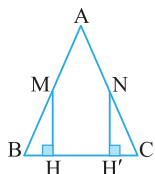
$$\begin{cases} \triangle ABC: \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$



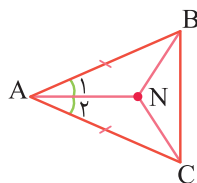
$$\text{فرض: } OA = OB$$

$$\text{حکم: } AH' = BH$$

$$\begin{cases} OA = OB \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{(وز)}} \triangle AH'O \cong \triangle BHO \Rightarrow \text{(حکم مسئله ثابت می‌شود)}$$

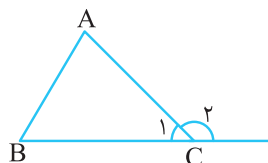


$$\begin{cases} \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ MB = NC \\ \hat{B} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{\text{(وز)}} \triangle MBH \cong \triangle NCH' \Rightarrow BH = CH'$$



$$\begin{cases} AB = AC \\ AN \text{ (مستترک)} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ضض}} \triangle ABN \cong \triangle ACN$$

$$\text{اجزای متناظر: } NB = NC$$

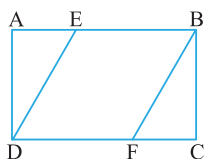


$$\text{فرض: } C_2 \text{ زاویه خارجی است}$$

$$\text{حکم: } \hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$$



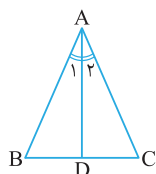
(ب)



$$\begin{cases} AE = FC \\ \hat{A} = \hat{C} = 90^\circ \\ AD = BC \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرض}} \triangle AED \cong \triangle CFB$$

اجزای متناظر: $DE = BF$

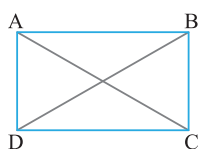
۱۴ الف



$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (AD نیمساز } \hat{A} \text{)} \\ AD \text{ (مشترک)} \\ AB = AC \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرض}} \triangle ABD \cong \triangle ACD$$

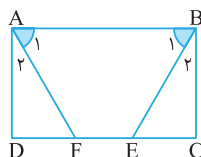
(ب)

در لوزی ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند. $\Rightarrow$ لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است.
در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند.



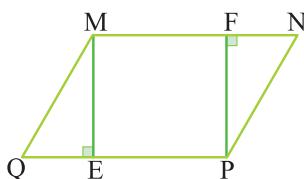
۱۵ مستطیل ABCD را در نظر بگیرید و قطرهای AC و BD را در آن رسم کنید. توجه کنید که در مثلث‌های ABD و BAC، $AD = BC$ ، $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ و $AB = AB$ (مشترک). بنابراین مثلث‌های ABD و BAC به حالت (ضرض) هم‌نهشت‌اند. در نتیجه $AC = BD$.

۱۶ چون $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$ ، $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 90^\circ$ و $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ، بنابراین: $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$.



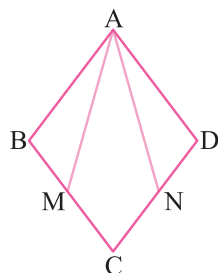
$$\begin{cases} \hat{A}_2 = \hat{B}_2 \\ AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow[\text{رض}]{\text{بنا به حالت}} \triangle ADF \cong \triangle BCE \Rightarrow AF = BE$$

۱۷

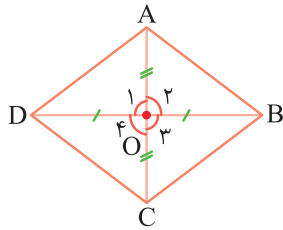


$$\begin{cases} \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ \\ \hat{Q} = \hat{N} \\ MQ = NP \end{cases} \xrightarrow{\text{وز}} \triangle MEQ \cong \triangle NFP$$

۱۸



$$\begin{cases} BM = DN \\ \hat{B} = \hat{D} \\ AB = AD \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرض}} \triangle ABM \cong \triangle ADN$$



۱۹ می دانیم هر لوزی یک متوازی الاضلاع است و در همه متوازی الاضلاعها، قطرها یکدیگر را

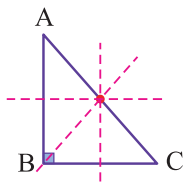
نصف می کنند. بنابراین $OB=OD$ و $OA=OC$.

$$\begin{cases} OA = OC \text{ (مشترک)} \\ AD = AB \\ OD = OB \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AOD \cong \triangle AOB \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

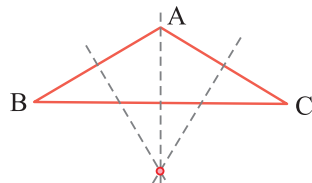
اکنون چون $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ$ داریم:

$$180^\circ = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_1 + \hat{O}_1 = 2\hat{O}_1$$

بنابراین $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 90^\circ$. بنابراین در یک لوزی قطرها بر هم عمودند.

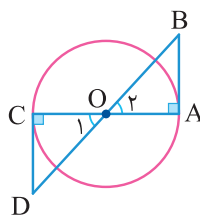


۲۰ الف همواره صحیح نیست. مثال نقض: در مثلث قائم الزاویه محل برخورد عمود منصفها روی وتر



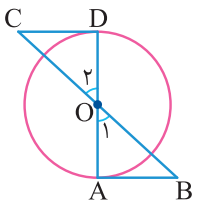
است.

در هر مثلث با زاویه باز محل برخورد عمود منصفها خارج مثلث است.

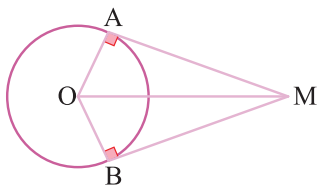


$$\begin{cases} OA = OC \text{ (شعاع دایره)} \\ \hat{A} = \hat{C} = 90^\circ \\ \hat{O}_2 = \hat{O}_1 \text{ (متقابل به رأس)} \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \triangle ABO \cong \triangle CDO$$

اجزای متناظر: $AB = CD$

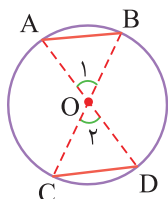


$$\begin{cases} OA = OD \text{ (شعاع دایره)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ (متقابل به رأس)} \\ \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \triangle OAB \cong \triangle ODC$$



$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ OM \text{ (مشترک)} \\ OA = OB \text{ (شعاع دایره)} \end{cases} \xrightarrow{\text{و ض}} \triangle OAM \cong \triangle OBM$$

اجزای متناظر: $MA = MB$



فرض: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ حکم: $AB = CD$

چون $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ، پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.



$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OB = OD \text{ (شعاع)} \\ OA = OC \text{ (شعاع)} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض.ض.ض.}} \triangle OAB \cong \triangle OCD$$

اجزای متناظر: $AB = CD$

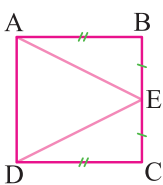
تناسب اضلاع: $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

مستطیل A با مستطیل C متشابه است. ۲۴

در دو مثلث متشابه ضلع‌های روبه‌رو به زاویه‌های برابر متناسب‌اند. بنابراین ۲۵

$$\frac{x}{12} = \frac{15}{5} \Rightarrow x = \frac{15 \times 12}{5} = 36$$

۲۶ الف



$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{C} = 90^\circ \\ BE = CE \\ AB = DC \end{cases} \xrightarrow{\text{ض.ض.ض.}} \triangle ABE \cong \triangle DCE$$

اجزای متناظر: $AE = DE$

ب

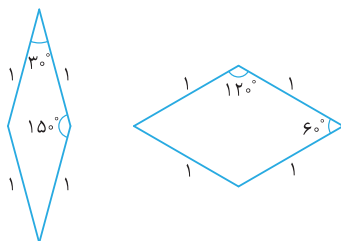
$$\frac{\text{ضلع لوزی کوچک‌تر}}{\text{ضلع لوزی بزرگ‌تر}} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{\text{ضلع لوزی کوچک‌تر}}{21} = \frac{5}{7} \Rightarrow \text{ضلع لوزی کوچک‌تر} = \frac{21 \times 5}{7} = 15 \text{ cm}$$

۲۷ الف

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AC \text{ (مستتر)} \\ AB = AD \end{cases} \xrightarrow{\text{ض.ض.ض.}} \triangle ABC \cong \triangle ADC \Rightarrow BC = DC$$

$$\frac{3}{9} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = \frac{12 \times 3}{9} = 4$$

ب



خیر، مثلاً لوزی‌های شکل مقابل متشابه نیستند. ۲۸

۲۹

نسبت تشابه: $\frac{1}{5} = 2$, نسبت تشابه: $\frac{x-1}{4} = \frac{1}{5} = \frac{x+7}{8}$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{1}{5} = \frac{2}{1} \Rightarrow x-1=8 \Rightarrow x=9$$

از طرف دیگر با جایگذاری $x=9$ در $\frac{x+7}{8}$ داریم $\frac{9+7}{8} = \frac{16}{8} = 2$. بنابراین مقدار x برابر ۹ است.

$$\frac{30}{100} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{10 \times 30}{100} = 3 \text{ cm}$$



ب) چون شکل کوچک شده با شکل اصلی متشابه است، اندازه زاویه‌ها تغییری نمی‌کند. بنابراین اندازه زاویه در تصویر خروجی 108° است.

فصل چہارم

توان و ریشہ

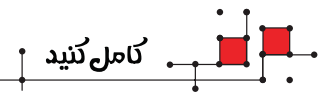


درس اول: توان صحیح



درست یا نادرست  

(الف)  (ب)  (پ)  (ت) 



(الف) ۶ (ب) $(-\frac{2}{3})^3 \times (\frac{4}{3})^{-2} = (-\frac{2}{3})^3 \times (\frac{3}{4})^2 = -\frac{8}{27} \times \frac{9}{16} = -\frac{1}{6}$ (پ) $(3)^{-1} = \frac{1}{3}$

پرسش‌های دو گزینه‌ای

(الف) گزینه (۱)
(ب) گزینه (۲)

$$(\frac{3}{4})^{-2} = (\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9} < 2, \quad (\frac{2}{3})^{-2} = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} > 2$$

$$\left. \begin{aligned} (\frac{4}{5})^{-4} &= (\frac{5}{4})^4 \\ (\frac{4}{5})^{-3} &= (\frac{5}{4})^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\frac{5}{4})^3 < (\frac{5}{4})^4$$

(پ) گزینه (۲)

تمرین‌های تشریحی

(۱)

(الف) $(\frac{2}{3})^{-3} = (\frac{3}{2})^3$ (ب) $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$

(پ) $(-\frac{1}{2})^{-2} = \frac{1}{(-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

(۲)

(الف) نادرست (ب) درست (پ) نادرست (ت) درست
(الف) نادرست (ب) نادرست (پ) درست (ت) نادرست



۳

$$\text{الف) } \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} + \frac{2^{-1}}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\text{ب) } \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} \left(\frac{2}{3}\right)^{-6} = \left(\frac{4}{3}\right)^5 \left(\frac{3}{2}\right)^6 = \frac{4^5}{3^5} \times \frac{3^6}{2^6} = \frac{(2^2)^5}{3^5} \times \frac{3^6}{2^6} = \frac{2^{10}}{3^5} \times \frac{3^6}{2^6} = 2^{(10-6)} \times 3^{(6-5)} = 2^4 \times 3 = 48$$

$$\text{پ) } (3^{-1} - 2^{-2} \times 8)^{-1} = \left(\frac{1}{3} - (2^{-2} \times 8)\right)^{-1} = \left(\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} \times 8\right)\right)^{-1} = \left(\frac{1}{3} - 2\right)^{-1} = \left(\frac{1-6}{3}\right)^{-1} = \left(-\frac{5}{3}\right)^{-1} = \left(-\frac{3}{5}\right)^1 = -\frac{3}{5}$$

$$\text{ت) } ((\sqrt{2})^{-3})^{-2} = (\sqrt{2})^{(-3) \times (-2)} = (\sqrt{2})^6 = (\sqrt{2})^{2 \times 3} = ((\sqrt{2})^2)^3 = 2^3 = 8$$

$$\text{ث) } -(-(-\frac{1}{2})^{-1})^{-2} = -(-(-2))^{-2} = -2^{-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{ج) } (-2)^{-4} (-\frac{1}{2})^{-2} 2^{-3} = (-1)^{-4} 2^{-4} (-1)^{-2} (2^{-1})^{-2} 2^{-3} = 2^{-4} \times 2^2 \times 2^{-3} = 2^{-4+2-3} = 2^{-5}$$

$$\text{ح) } (-3)^{-2} (-3^2)^3 (-3^2)^{-6} (-3^2)^{-3} = (-1)^{-2} 3^{-2} ((-1)^3 (3^2)^3) (-1)^{-6} (3^2)^{-6} (-1)^{-3} (3^2)^{-3} \\ = 3^{-2} (-3^6) (3^{-12}) (-1) (3^{-6}) = 3^{-2+6-12-6} = 3^{-14}$$

$$\text{د) } (\sqrt{3})^{-7} \div (\sqrt{3})^{-3} = (\sqrt{3})^{-7-(-3)} = (\sqrt{3})^{-4} = \frac{1}{\sqrt{3}^4} = \frac{1}{(\sqrt{3}^2)^2} = \frac{1}{(3)^2} = \frac{1}{9}$$

$$\text{ذ) } \frac{9^4 \times 3^{-22}}{27^{-5}} = \frac{(3^2)^4 \times 3^{-22}}{(3^3)^{-5}} = \frac{3^8 \times 3^{-22}}{3^{-15}} = 3^{8-22-(-15)} = 3^1 = 3$$

$$\text{ر) } (-2/25)^{-5} \times ((\frac{2}{3})^2)^{-4} = (-\frac{9}{4})^{-5} \times (\frac{2}{3})^{-8} = (-1)^{-5} (\frac{3}{2})^{-10} \times (\frac{2}{3})^{-8} = (-1)^{-5} (\frac{3}{2})^{10} \times (\frac{2}{3})^{-8} = -(\frac{3}{2})^2 = -\frac{9}{4}$$

$$\text{ز) } \frac{(-\frac{1}{3})^4 (-3^5)}{(-3^{-1})^{-4}} = \frac{(\frac{1}{3})^4 (-3^5)}{(-1)^{-4} (3^{-1})^{-4}} = \frac{(3^{-1})^4 (-3^5)}{3^{(-1)(-4)}} = -\frac{3^{-4} (3^5)}{3^4} = -\frac{3^{-4+5}}{3^4} = -\frac{3}{3^4} = -3^{1-4} = -3^{-3}$$

$$\text{س) } \frac{(-\frac{1}{2})^3 + (-\frac{2}{3})^{-2}}{((-4)^{-3})^{-1}} = \frac{-\frac{1}{2^3} + (-\frac{3}{2})^2}{(-4)^{(-3)(-1)}} = \frac{-\frac{1}{8} + \frac{9}{4}}{-4^3} = \frac{\frac{-1+18}{4}}{-64} = \frac{\frac{17}{4}}{-64} = -\frac{17}{4 \times 64} = -\frac{17}{256}$$

$$\text{ش) } (1 + (1 - 5^{-2})^{-1})^{-1} = (1 + (1 - \frac{1}{5})^{-1})^{-1} = (1 + (\frac{5}{4})^{-1})^{-1} = (1 + \frac{4}{5})^{-1} = (\frac{9}{5})^{-1} = \frac{5}{9}$$

۴

$$\text{الف) } a^x \div a^y \times a^z = (a^x \div a^y) \times a^z = (a^{x-y}) \times a^z = a^{-x} \times a^z = a^{-x}$$

$$\text{ب) } (a^{-2})^4 \times a^{10} = a^{-8} \times a^{10} = a^2$$

$$\text{پ) } (a^{-4})^{-1} \times (a^2)^{-2} = a^4 \times a^{-4} = a^{4-4} = a^0 = 1$$

$$\text{ت) } a^0 \times a^{-4} \div a^3 \div a = (1 \times a^{-4}) \div a^3 \div a = (a^{-4} \div a^3) \div a = a^{-4-3} \div a = a^{-7} \div a = a^{-8}$$

$$\text{ث) } -(-(-a^{-3})^{-3})^{-3} = -(-1)^{-3} ((-a^{-3})^{-3})^{-3} = -\frac{1}{(-1)^3} \times ((-1)^{-3})^{-3} ((a^{-3})^{-3})^{-3} \\ = (-1)^9 a^{(-3)(-3)(-3)} = -a^{-27}$$

$$\begin{aligned} \text{ج)} \quad (-a^{-1})^3(-a^{-2})^{-2}(-(-a)^3)^{-1} &= (-1)^3(a^{-1})^3(-1)^{-2}(a^{-2})^{-2}(-1)^{-1}((-a)^3)^{-1} \\ &= -(a^{-3}) \frac{1}{(-1)^2} a^4 \frac{1}{(-1)^1} (-1^3)^{-1} (a^3)^{-1} = -a^{-3} a^4 (-1) \times \frac{1}{(-1)^3} a^{-3} \\ &= -a^{-3} a^4 a^{-3} = -a^{-2} \end{aligned}$$

۵

$$\text{الف)} \quad \frac{1}{3} a^{-4} b^6 (-9a^5 b^{-3}) = \left(\frac{1}{3}(-9)\right) a^{-4+5} b^{6-3} = -3ab^3$$

$$\text{ب)} \quad \left(-1 \frac{1}{4} a^{-3} b^{-5}\right) \left(-\frac{2}{5} a^{-2} b^{-3}\right) = \left(-\frac{5}{4}\right) \left(-\frac{2}{5}\right) a^{-3-2} b^{-5-3} = \frac{1}{2} a^{-5} b^{-8}$$

$$\text{پ)} \quad (a^4 b^{-5})^3 (a^{-6} b^3)^5 = a^{12} b^{-15} a^{-30} b^{15} = a^{12-30} b^{-15+15} = a^{-18} b^0 = a^{-18}$$

$$\text{ت)} \quad (3^{-1} a^{-1} b^{-2})^{-4} (5^4 a^4 b^4)^{-2} = 3^4 a^4 b^8 5^{-2} a^{-2} b^{-4} = \frac{3^4}{5^2} a^{4-2} b^{8-4} = \frac{1}{36} a^{-2} b^4 = \frac{a^{-2}}{36}$$

۶) ابتدا توجه کنید که $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$

$$\begin{aligned} \frac{(4^3)^{-1} \times 16}{4^{-6}} &= \frac{4^{3 \times (-1)} \times 4^2}{4^{-6}} = \frac{4^{-3} \times 4^2}{4^{-6}} = \frac{4^{-3+2}}{4^{-6}} = \frac{4^{-1}}{4^{-6}} = 4^{-1-(-6)} \\ &= 4^5 = \left(\left(\frac{1}{4} \right)^{-1} \right)^5 = \left(\frac{1}{4} \right)^{-5} = (2^5)^{-5} \end{aligned}$$

۷

$$\text{الف)} \quad (5/)^{x-1} = 2^{3-2x}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 2^{3-2x} \Rightarrow (2^{-1})^{x-1} = 2^{3-2x} \Rightarrow 2^{-x+1} = 2^{3-2x} \Rightarrow -x+1=3-2x \Rightarrow x=2$$

$$\text{ب)} \quad \frac{9^{x-2}}{3^{x+1}} = 11^{-x}$$

$$\begin{aligned} \frac{(3^2)^{x-2}}{3^{x+1}} &= (3^4)^{-x} \Rightarrow \frac{3^{2x-4}}{3^{x+1}} = 3^{-4x} \Rightarrow \frac{3^{2x} \times 3^{-4}}{3^x \times 3^1} = 3^{-4x} \Rightarrow \frac{3^{2x-x}}{3 \times 3^1} = 3^{-4x} \Rightarrow \frac{3^x}{3^{-4x}} = 3^5 \\ &\Rightarrow 3^{x-(-4x)} = 3^5 \Rightarrow 3^{5x} = 3^5 \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1 \end{aligned}$$

$$\text{پ)} \quad ((3^x)^{-1})^3 = 11^6$$

$$3^{x^3} (-1)^{\times 3} = (3^4)^6 \Rightarrow 3^{-3x^3} = 3^{24} \Rightarrow -3x^3 = 24 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$$

$$\frac{(2^6 \times 3^5)^3 \times 2^5 \times 3^8}{6^{24}} = 6^n$$

$$\begin{aligned} \text{ت)} \quad \frac{2^{18} \times 3^{15} \times 2^5 \times 3^8}{6^{24}} &= 6^n \Rightarrow \frac{2^{23} \times 3^{23}}{6^{24}} = 6^n \Rightarrow \frac{(2 \times 3)^{23}}{6^{24}} = 6^n \Rightarrow \frac{6^{23}}{6^{24}} = 6^n \\ &\Rightarrow 6^{23-24} = 6^n \Rightarrow 6^{-1} = 6^n \Rightarrow n = -1 \end{aligned}$$



۸ توجه کنید که

$$(-1)^{-2}=1, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}, \quad 3^{-2}=\frac{1}{9}, \quad -(-4)^{-1}=\frac{1}{4}, \quad \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}=-27, \quad \sqrt{5}^2=5$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} < 0 < 3^{-2} < \left(\frac{1}{2}\right)^3 < -(-4)^{-1} < (-1)^{-2} < \sqrt{5}^2$$

بنابراین

۹ چون می‌توان توان‌ها را با پایه یکسان نوشت، ابتدا این کار را می‌کنیم. توجه کنید که $b=2^{5^2}=2^{25}$, $a=(2^2)^5=2^{2 \times 5}=2^{10}$

$$c=(2^4)^5=2^{4 \times 5}=2^{20} \text{ و } a < c < b \text{ در نتیجه}$$

تمرین‌های ویژه

۱

$$(a^{b-2})^{-3}=a^{-3(b-2)}=a^{-3b+6}=(a^{-3b})(a^6)=(a^{-b})^3 \times a^6=2^3 \times a^6=8a^6$$

$$\frac{(a^{b-2})^{-3}}{a^6}=\frac{8a^6}{a^6}=8 \text{ بنابراین}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^b=3 \Rightarrow \frac{1}{a^b}=3 \Rightarrow a^b=\frac{1}{3}$$

۲ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{3}{a^b}+a^{-2b}=\frac{3}{a^b}+\left(a^b\right)^{-2}=\frac{3}{\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9+\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=9+\frac{1}{\frac{1}{9}}=9+9=18$$

بنابراین

۳

$$\frac{2^a+3^{-a}}{2^{-a}+3^a}=\frac{2^a+\frac{1}{3^a}}{\frac{1}{2^a}+3^a}=\frac{\frac{2^a \times 3^a+1}{3^a}}{\frac{1+2^a \times 3^a}{2^a}}=\frac{2^a}{3^a}=\left(\frac{2}{3}\right)^a$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^a=\left(\frac{3}{2}\right)^{2a}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2a}=(\frac{1}{1})^{-2}=\left(\frac{1}{1}\right)^{-2}=1$$

$$\text{بنابراین } \left(\frac{2}{3}\right)^a=\frac{1}{1}, \text{ پس}$$

۱ گزینۀ (۴)

$$-(-2^{-1})^2 + (2^2)^{-1} = -(2^{-1})^2 + (2^2)^{-1} = -2^{-2} + 2^{-2} = 0.$$

۲ گزینۀ (۳)

$$((-2)^{-3})^{-4} \times (2^{-3})^3 = (-2)^{12} \times 2^{-9} = 2^{12} \times 2^{-9} = 2^3 = 8$$

۳ گزینۀ (۲)

$$\begin{aligned} \left(\left((2+1)^{-1} + 1 \right)^{-1} + 1 \right)^{-1} + 1 &= \left(\left(3^{-1} + 1 \right)^{-1} + 1 \right)^{-1} + 1 = \left(\left(\frac{1}{3} + 1 \right)^{-1} + 1 \right)^{-1} + 1 \\ &= \left(\left(\frac{4}{3} \right)^{-1} + 1 \right)^{-1} + 1 = \left(\frac{3}{4} + 1 \right)^{-1} + 1 = \left(\frac{7}{4} \right)^{-1} + 1 = \frac{4}{7} + 1 = \frac{11}{7} \end{aligned}$$

۴ گزینۀ (۱)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2^{-2}} \right)^{-2} \times \left(-\frac{1}{2^{-1}} \right)^{-2} \times \left(-\frac{1}{2} \right)^{-2} &= (-2^2)^{-2} (-2)^{-2} (-2^{-1})^{-2} \\ &= (-1)^{-2} 2^{-4} (-1)^{-2} 2^{-2} (-1)^{-2} 2^2 = 2^{-4-2+2} = 2^{-4} \end{aligned}$$

۵ گزینۀ (۱)

$$(9^{6m-1} \times 27^{1-4m})^{-1} = (3^{2(6m-1)} \times 3^{3(1-4m)})^{-1} = (3^{2(6m-1)+3(1-4m)})^{-1} = (3^1)^{-1} = 3^{-1}$$

۶ گزینۀ (۴)

$$\left(\frac{1/8}{0/18} \right)^{-7} \div \left(\frac{14/4}{0/144} \right)^{-3} = 10^{-7} \div (100)^{-3} = 10^{-7} \div 10^{-6} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

۷ گزینۀ (۳)

$$fa^{-5}b^7 \times \frac{1}{f} a^{-3}b^{-2} = \left(f \times \frac{1}{f} \right) a^{-5-3}b^{7-2} = 5a^{-8}b^5$$

۸ گزینۀ (۴)

$$\left(\frac{1}{8} a^{-4} b^{-2} \right)^2 \left(\frac{a^{-3}}{fb} \right)^{-3} = \frac{1}{64} a^{-8} b^{-4} \left(\frac{a^9}{f^{-3} b^{-3}} \right) = \left(\frac{1}{64} \times \frac{1}{f^{-3}} \right) a^{-8+9} b^{-4+3} = \frac{a}{b}$$

۹ گزینۀ (۲)

$$\frac{3^x + 3^x + 3^x}{2^x + 2^x + 2^x} = \frac{3 \times 3^x}{3 \times 2^x} = \left(\frac{3}{2} \right)^x$$

بنابراین $x = -2$ در نتیجه $\left(\frac{3}{2} \right)^x = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \left(\frac{3}{2} \right)^{-2}$

۱۰ گزینۀ (۳)

توجه کنید که $\frac{1}{2^{5-x}} = (2^{5-x})^{-1} = 2^{x-5}$. بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$5 \times 2^{x-5} + 3 \times 2^{x-5} = 128 \Rightarrow 8 \times 2^{x-5} = 128 \Rightarrow 2^3 \times 2^{x-5} = 128 \Rightarrow 2^{x-2} = 128 = 2^7 \Rightarrow x-2=7 \Rightarrow x=9$$

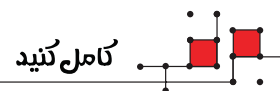


درس دوم: نماد علمی



درست یا نادرست

الف) $\times$ ب) $\times$ پ) $\times$ $12/314 = 1/2314 \times 10^0$



الف) $234 \times 10^{-7} = 2/34 \times 10^2 \times 10^{-7} = 2/34 \times 10^{-5}$

ب) $2/5 \times 10^{-10} \times 8 \times 10^6 = 20 \times 10^{-4} = 2 \times 10^1 \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-3}$

پرسش‌های دو گزینه‌ای

الف) گزینه (۱)

ب) گزینه (۲)

پ) گزینه (۱)

$$32 \times 10^{-6} = 3/2 \times 10^1 \times 10^{-6} = 3/2 \times 10^{-5} > 2/3 \times 10^{-5}$$

$$2/5 \times 10^{-10} \times 8 \times 10^6 = 20 \times 10^{-4} = 2 \times 10^1 \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-3}$$

تمرین‌های تشریحی

۱

الف) $48000000 = 4/8 \times 10^8$

پ) $0/4321 = 4/321 \times 10^{-1}$

ث) $3504/8 = 3/5048 \times 10^3$

ب) $9913 = 9/913 \times 10^3$

ت) $0/0000214 = 2/14 \times 10^{-6}$

۲

الف) $1/26 \times 10^{-3}$

ب) 8×10^{-4}

پ) $\frac{0/12 \times 10^{-3}}{0/005 \times 10^9} = \frac{12 \times 10^{-2} \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3} \times 10^9} = \frac{12 \times 10^{-5}}{5 \times 10^6} = \left(\frac{12}{5}\right) \times 10^{-11} = 2/4 \times 10^{-11}$

۳

$a + b = 3/84 \times 10^{-3}$, $a \times b = 2/048 \times 10^{-6}$, $a \div b = 2 \times 10^{-1}$

ب) دریاچه‌های A و D

الف) دریاچه B

۴

۵

الف) $1/2 \times 10^6$, $2/94 \times 10^{-3}$, $3/04 \times 10^{-5}$, $1/9 \times 10^{-5}$

ب) $2/1 \times 10^5$, $4/9 \times 10^{-1}$, $3/14 \times 10^{-3}$, $6/22 \times 10^{-4}$

پ) $5/6 \times 10^{-7}$, $5/3 \times 10^{-7}$, $2/3 \times 10^{-7}$

$$0.07 > 0.0007 \times 10^n \Rightarrow 7 \times 10^{-2} > 7 \times 10^{-4} \times 10^n \Rightarrow 7 \times 10^{-2} > 7 \times 10^{n-4}$$

۶

به این ترتیب می‌توانیم n را برابر ۱، صفر و ۱- بگیریم.

۷) الف) ۱، ۲، ۳ و ۴ ب) ۰، ۱-، ۲- و ۳-

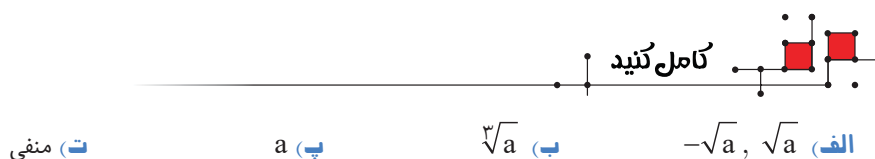


درس سوم: ریشه گیری



درست یا نادرست

الف) ☒ (الف) ☒ (ب) ☒ (ت) ☒ (ث)



پرسش های دو گزینه ای

الف) گزینه (۱) (ب) گزینه (۱) (پ) گزینه (۲)

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{5} \sqrt{75} &= \frac{4}{5} \sqrt{25 \times 3} = \frac{4}{5} \times 5 \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \\ \frac{3}{4} \sqrt{48} &= \frac{3}{4} \sqrt{16 \times 3} = \frac{3}{4} \times 4 \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{4}{5} \sqrt{75} > \frac{3}{4} \sqrt{48}$$

ت) گزینه (۱)

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{200} \times \sqrt[3]{135} &= \sqrt[3]{200 \times 135} = \sqrt[3]{(8 \times 25)(27 \times 5)} = \sqrt[3]{(2^3 \times 5^2) \times (3^3 \times 5)} \\ &= \sqrt[3]{2^3 \times 3^3 \times 5^3} = \sqrt[3]{(2 \times 3 \times 5)^3} = 2 \times 3 \times 5 = 30 \end{aligned}$$

ث) گزینه (۱)

تمرین های تشریحی

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} &= -\frac{1}{2}, \quad \sqrt{-\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = -\frac{1}{2}, \quad \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} &= -1 \\ \frac{-1}{\frac{1}{3}} &= -3 \end{aligned}$$

۱) الف) توجه کنید که

بنابراین مقدار عبارت موردنظر برابر است با

$$\sqrt[3]{123/4 \times 12/34 \times 1/234} = \sqrt[3]{\frac{1234}{10} \times \frac{1234}{100} \times \frac{1234}{1000}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1234}{100}\right)^3} = \frac{1234}{100} = 12/34$$

ب) توجه کنید که

ابتدا توجه کنید که $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$ ، بنابراین

$$6 \left(\frac{3}{1 + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27}} - \frac{2}{\sqrt[3]{216}} \right) = \frac{18}{1+2+3} - \frac{12}{6} = \frac{18}{6} - \frac{12}{6} = 3 - 2 = 1$$

$$5\sqrt[3]{\frac{27}{1000}} + 3\sqrt{2/25} = 5\sqrt[3]{\frac{27}{1000}} + 3\sqrt{\frac{225}{100}} = 5\sqrt[3]{\left(\frac{3}{10}\right)^3} + 3\sqrt{\left(\frac{15}{10}\right)^2} = 5 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{15}{10} = \frac{15}{10} + \frac{45}{10} = \frac{60}{10} = 6 \quad \text{ت}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(\frac{4}{10000})^{-1}} + \sqrt[3]{(\frac{8}{1000})^{-1}} &= \sqrt{\left(\frac{4}{10000}\right)^{-1}} + \sqrt[3]{\left(\frac{8}{1000}\right)^{-1}} \\ &= \sqrt{\frac{10000}{4}} + \sqrt[3]{\frac{1000}{8}} = \sqrt{\left(\frac{100}{2}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{10}{2}\right)^3} = \frac{100}{2} + \frac{10}{2} = 50 + 5 = 55 \end{aligned} \quad \text{ث}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{0.09} - \sqrt{0.01}}{\sqrt[3]{0.008} - \sqrt[3]{0.001}} &= \frac{\sqrt{\frac{9}{100}} - \sqrt{\frac{1}{100}}}{\sqrt[3]{\frac{8}{1000}} - \sqrt[3]{\frac{1}{1000}}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{10}\right)^3} - \sqrt[3]{\left(\frac{1}{10}\right)^3}} = \frac{\frac{3}{10} - \frac{1}{10}}{\frac{2}{10} - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{1}{10}} = 2 \end{aligned} \quad \text{ج}$$

$$\sqrt[3]{\frac{7/29 \times 729}{7290}} = \sqrt[3]{\frac{729 \times 729}{7290 \times 1000}} = \sqrt[3]{\frac{729 \times 729}{729 \times 1000}} = \sqrt[3]{\frac{729}{1000}} = \sqrt[3]{\left(\frac{9}{10}\right)^3} = \frac{9}{10} = 0.9 \quad \text{د}$$

$$\sqrt[3]{\frac{727}{236}} = \sqrt[3]{\left(\frac{7^9}{2^{12}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{7^3}{2^4} \quad \text{ه}$$

$$\sqrt[3]{47 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}} \div (-2)^{21} = \sqrt[3]{(2^2)^7 \times (2^{-1})^{-4}} \div (-2)^{21} = \sqrt[3]{\frac{2^{14} \times 2^4}{-2^{21}}} = \sqrt[3]{\frac{2^{18}}{-2^{21}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{-2^3}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = -\frac{1}{2} \quad \text{و}$$

د ابتدا توجه کنید که $\sqrt[3]{8} = 2$ ، بنابراین $\sqrt[3]{24} + \sqrt{7} + \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{24} + \sqrt{7} + 2 = \sqrt[3]{24} + \sqrt{9} = \sqrt[3]{24} + 3 = \sqrt[3]{27} = 3$

ه ابتدا توجه کنید که $\sqrt[3]{27} = 3$ ، بنابراین

$$\sqrt{15 + \frac{2}{3}} \sqrt{\frac{3}{4} \sqrt[3]{27}} = \sqrt{15 + \frac{2}{3}} \sqrt{\frac{3}{4} \times 3} = \sqrt{15 + \frac{2}{3}} \sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{15 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}} = \sqrt{15 + 1} = \sqrt{16} = 4$$

و ابتدا توجه کنید که $\sqrt[3]{-8} = -2$ ، بنابراین

$$\sqrt{5 - \sqrt{(-4)^2}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt[3]{-8}} = \sqrt{5 - \sqrt{16}} + \sqrt[3]{-2 - (-2)} = \sqrt{5 - \sqrt{16}} + \sqrt[3]{0} = \sqrt{5 - \sqrt{16}} = \sqrt{5 - 4} = \sqrt{1} = 1$$

۲

الف $\sqrt{112} = \sqrt{2^4 \times 7} = \sqrt{4^2 \times 7} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{7} = 4\sqrt{7}$

ب $\sqrt[3]{1080} = \sqrt[3]{2^3 \times 3^3 \times 5} = \sqrt[3]{6^3 \times 5} = \sqrt[3]{6^3} \times \sqrt[3]{5} = 6\sqrt[3]{5}$

۳

الف $\frac{\sqrt{12} \times \sqrt{270}}{\sqrt{60}} = \frac{\sqrt{12 \times 270}}{\sqrt{60}} = \sqrt{\frac{12 \times 270}{60}} = \sqrt{54} = \sqrt{6 \times 9} = \sqrt{6} \times 3 = 3\sqrt{6}$

ب $\frac{\sqrt[3]{49 \times 112}}{\sqrt[3]{250}} = \frac{\sqrt[3]{49 \times 112}}{\sqrt[3]{250}} = \sqrt[3]{\frac{49 \times 112}{250}} = \sqrt[3]{\frac{2^3 \times 7^3}{5^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2 \times 7}{5}\right)^3} = \frac{14}{5}$

پ $\sqrt{1/28} \times \frac{1}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{1}{28}} \times \frac{1}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{1}{28 \times 8}} = \sqrt{\frac{1}{224}} = \sqrt{\frac{1}{100 \times 8}} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{1}{10} = 0.1$

ت $\sqrt[3]{6 \frac{1}{4}} \times \sqrt[3]{2 \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{25}{4}} \times \sqrt[3]{\frac{5}{2}} = \sqrt[3]{\frac{25 \times 5}{4 \times 2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{2}\right)^3} = \frac{5}{2}$



$$\text{ث)} \sqrt[3]{\frac{75}{9}} \div \sqrt[3]{\frac{-2}{9}} = \sqrt[3]{\frac{75}{100}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{27}{-8}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2}\right)^3} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{ج)} \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}} \div \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{\frac{20}{2}}}{\sqrt{\frac{30}{6}}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$$

$$\text{د)} \frac{\sqrt{150} \times \sqrt{108}}{\sqrt{180}} = \frac{\sqrt{150 \times 108}}{\sqrt{180}} = \sqrt{\frac{150 \times 108}{180}} = \sqrt{5 \times 18} = \sqrt{5 \times 2 \times 3^2} = \sqrt{5 \times 2} \times \sqrt{3^2} = 3\sqrt{10}$$

$$\text{ه)} \frac{\sqrt{1/8} \times \sqrt{6/3}}{\sqrt{0/14}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{8} \times \frac{6}{3}}}{\sqrt{\frac{14}{100}}} = \frac{\sqrt{\frac{18}{24}}}{\sqrt{\frac{14}{100}}} = \sqrt{\frac{18 \times 63}{100}} = \sqrt{\frac{14}{100}} = \sqrt{9^2} = 9$$

$$\text{و)} \frac{\sqrt[3]{-\frac{5}{4}} \times \sqrt[3]{\frac{6^3}{5}}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{-5 \times 6^3}{4 \times 5}} = \sqrt[3]{\frac{-6^3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{-6^3}{8}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{6}{2}\right)^3} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$\text{ز)} \frac{\sqrt{0/4} + \sqrt{6/4}}{\sqrt{0/1} + \sqrt{8/1}} = \frac{\sqrt{\frac{4}{10}} + \sqrt{\frac{64}{10}}}{\sqrt{\frac{1}{10}} + \sqrt{\frac{81}{10}}} = \frac{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{10}}}{\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{10}}} = \frac{\frac{2+8}{\sqrt{10}}}{\frac{1+9}{\sqrt{10}}} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\text{ح)} \sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{15}} \times \sqrt{27} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{27}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{5 \times 27}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{5 \times 27}{15}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{ط)} \sqrt{2\frac{1}{5}} \times \sqrt{1\frac{1}{11}} \times \sqrt{2\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{11}{5} \times \frac{12}{11} \times \frac{12}{5}} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{12}{5}$$

$$\text{ی)} \sqrt{\sqrt{39} \times \sqrt{117} \times \sqrt{507}} = \sqrt{\sqrt{39 \times 117 \times 507}} = \sqrt{\sqrt{3^4 \times 13^4}} = \sqrt{3^2 \times 13^2} = 3 \times 13 = 39$$

$$\text{ک)} \sqrt{1+\frac{1}{2}} \times \sqrt{1+\frac{1}{3}} \times \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{4}{3}} \times \sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\text{الف)} \frac{\sqrt{a^f} \times \sqrt{b^{-3}}}{\sqrt{a^{-e}} \times \sqrt{b^{-5}}} = \frac{\sqrt{a^f \times b^{-3}}}{\sqrt{a^{-e} \times b^{-5}}} = \sqrt{\frac{a^f \times b^{-3}}{a^{-e} \times b^{-5}}} = \sqrt{\frac{a^f \times a^e \times b^5}{b^3}} = \sqrt{a^{10} \times b^2} = \sqrt{(a^5 b)^2} = |a^5 b|$$

$$\text{ب)} \sqrt[3]{2ab} \times \sqrt[3]{fa^2b} \times \sqrt[3]{27b} = \sqrt[3]{2ab \times fa^2b \times 27b} = \sqrt[3]{8 \times 27a^2b^3} = \sqrt[3]{(2 \times 3 \times ab)^3} = 6ab$$

۵) ابتدا توجه کنید $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$ بنابراین

$$\sqrt{14 + \sqrt{1 - \sqrt[3]{-27}}} = \sqrt{14 + \sqrt{1 - (-3)}} = \sqrt{14 + \sqrt{4}} = \sqrt{14 + 2} = \sqrt{16}$$

$$\sqrt{14 + \sqrt{1 - \sqrt[3]{-27}}} < \sqrt{17}$$

در نتیجه چون $\sqrt{16} < \sqrt{17}$ پس

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{2\sqrt{16}}} = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{2 \times 4}} = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{6 + 2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

بنابراین $2^n = 2$ پس $n = 1$.

(۷)

$$\frac{\sqrt{0.016}}{\sqrt{0.4}} = \frac{\sqrt{\frac{16}{1000}}}{\sqrt{\frac{4}{10}}} = \sqrt{\frac{\frac{16}{1000}}{\frac{4}{10}}} = \sqrt{\frac{4}{100}} = \sqrt{\left(\frac{2}{10}\right)^2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

بنابراین $\frac{1}{5} = 5^n$ ، در نتیجه $n = -1$.

(۸)

$$x^3 = \frac{8}{27} a^6 = \left(\frac{2}{3} a^2\right)^3 \Rightarrow x = \frac{2}{3} a^2$$

فرض می‌کنیم طول یال مکعب برابر x باشد. در این صورت

$$6x^2 = 6\left(\frac{2}{3} a^2\right)^2 = \frac{8}{3} a^4$$

(۹)

$$\frac{0.2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{2}{10} \sqrt{\frac{19}{8}}, \quad \frac{0.4}{\sqrt{4}} \sqrt{\frac{19}{32}} = \frac{4}{10} \sqrt{\frac{19}{8} \times \frac{1}{4}} = \frac{4}{10} \sqrt{\frac{19}{8}} \times \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{2}{10} \sqrt{\frac{19}{8}}$$

بنابراین دو عدد موردنظر برابرند، یعنی $\frac{0.2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{0.4}{\sqrt{4}} \sqrt{\frac{19}{32}}$

(۱۰)

ابتدا توجه کنید که $\sqrt{3/6} = \sqrt{36/10} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$. از طرف دیگر،

$$ab = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \Rightarrow (ab)^2 = 6 \Rightarrow a^2 b^2 = 6, \quad ac = \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{3/6} = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{a^2 b^2}{ac} = \frac{ab^2}{c}$$

(۱۱)

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{a^{11}} &= \sqrt{a^{10}} \times \sqrt{a} = \sqrt{(a^5)^2} \times \sqrt{a} = a^5 \sqrt{a} \\ a^2 \sqrt{a^9} &= a^2 \sqrt{a^8} \times \sqrt{a} = a^2 \times \sqrt{(a^2)^2} \times \sqrt{a} = a^2 \times a^2 \times \sqrt{a} = a^4 \sqrt{a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^5 \sqrt{a} > a^4 \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a^{11}} > a^2 \sqrt{a^5}$$

(۱۲)

الف) توجه کنید که $\sqrt[3]{1} = 1$ ، $\sqrt[3]{0} = 0$ و ریشه سوم هر عدد منفی، عددی منفی است. بنابراین می‌توانیم n را برابر ۱، صفر، -۱ و -۲ بگیریم.

ب) چون $\sqrt{2} \approx 1/4$ و $\sqrt[3]{1} = 1$ ، پس می‌توانیم n را برابر ۱، صفر، -۱ و -۲ بگیریم.

پ) چون $\sqrt{4} > \sqrt{2}$ ، پس کافی است $\sqrt[3]{n} \leq 2$ را بررسی کنیم. از طرف دیگر $\sqrt[3]{8} = 2$ ، پس می‌توانیم n را برابر ۸، ۷، ۶ و ۵ بگیریم.

ت) چون $\sqrt[3]{64} = 4$ ، پس می‌توانیم n را برابر ۶۵، ۶۶، ۶۷ و ۶۸ بگیریم.

(۱۳)

اعداد مثبت را با یکدیگر و اعداد منفی را نیز با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

$$2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}, \quad 3 = \sqrt[3]{27}$$

(۱) برای مقایسه اعداد ۳ و $2\sqrt[3]{2}$ توجه کنید که

$$\text{چون } \sqrt[3]{16} < \sqrt[3]{27}, \text{ پس } 2\sqrt[3]{2} < 3.$$

$$-2\sqrt[3]{3} = -\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} = -\sqrt[3]{24}, \quad -4 = -\sqrt[3]{64}$$

(۲) برای مقایسه اعداد -۴ و $-2\sqrt[3]{3}$ توجه کنید که

$$\text{چون } \sqrt[3]{24} < \sqrt[3]{64}, \text{ پس } -\sqrt[3]{24} > -\sqrt[3]{64}. \text{ در نتیجه } -2\sqrt[3]{3} > -4.$$

$$\text{بنابراین } -4 < -2\sqrt[3]{3} < 2\sqrt[3]{2} < 3.$$



۱۴

الف) $(\sqrt[3]{a})^3 - \sqrt[3]{a^3} = a - a = 0$

ب) $\sqrt{a^4} - \sqrt[3]{a^6} = \sqrt{(a^2)^2} - \sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2 - a^2 = 0$

تمرین‌های ویژه

۱

$$5\sqrt{8} = 5\sqrt{2^3} = 5\sqrt{2^2 \times 2} = 5\sqrt{2^2} \times \sqrt{2} = 5 \times 2 \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{32} = 3\sqrt{2^5} = 3\sqrt{2^4 \times 2} = 3\sqrt{2^4} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{(2^2)^2} \times \sqrt{2} = 3 \times 2^2 \times \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

چون $10\sqrt{2} > 12\sqrt{2}$ ، بنابراین $5\sqrt{8} > 3\sqrt{32}$.

۲

$$3\sqrt[3]{16} = 3\sqrt[3]{2^4} = 3\sqrt[3]{2^3 \times 2} = 3\sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2} = 3 \times 2 \times \sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$$

$$2\sqrt[3]{81} = 2\sqrt[3]{3^4} = 2\sqrt[3]{3^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3} = 2 \times 3 \times \sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{3}$$

چون $\sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{2}$ ، پس $6\sqrt[3]{3} > 6\sqrt[3]{2}$. بنابراین $2\sqrt[3]{81} > 3\sqrt[3]{16}$.

۳) توجه کنید $\sqrt[3]{-28} < 0$ و $\sqrt[3]{80} > 0$. بنابراین اگر $n \geq 0$ ، آن‌گاه $\sqrt[3]{-28} < n\sqrt[3]{80}$. اکنون اگر $n \leq -1$ ، چون $-\sqrt[3]{80} < \sqrt[3]{-28}$

بنابراین $\sqrt[3]{-28} < n\sqrt[3]{80}$. در نتیجه به‌ازای هر n صحیح و نامنفی $\sqrt[3]{-28} < n\sqrt[3]{80}$.

گزینه (۲)

توجه کنید که $\sqrt[3]{x^3} = x$ و $\sqrt{x^2} = |x|$ پس $\sqrt{(-4)^2} + \sqrt[3]{(-2)^3} - \sqrt{(-3)^2} = |-4| + (-2) - |-3| = 4 - 2 - 3 = -1$

گزینه (۱)

$$\frac{\sqrt{0/16} + \sqrt[3]{0/064}}{\sqrt[3]{0/008} - \sqrt[3]{0/064}} = \frac{\sqrt{\frac{16}{100}} + \sqrt[3]{\frac{64}{1000}}}{\sqrt[3]{\frac{8}{1000}} - \sqrt[3]{\frac{64}{1000}}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{4}{10}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{4}{10}\right)^3}}{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{10}\right)^3} - \sqrt[3]{\left(\frac{4}{10}\right)^3}} = \frac{\frac{4}{10} + \frac{4}{10}}{\frac{2}{10} - \frac{4}{10}} = \frac{\frac{8}{10}}{\frac{-2}{10}} = \frac{8}{-2} = -4$$

گزینه (۱)

ابتدا توجه کنید که $\sqrt[3]{64} = 4$ ، بنابراین

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt[3]{64}}}} = \sqrt[3]{6 + \sqrt{1 + \sqrt{5 + 4}}} = \sqrt[3]{6 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}} = \sqrt[3]{6 + \sqrt{1 + 3}} = \sqrt[3]{6 + \sqrt{4}} = \sqrt[3]{6 + 2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

گزینه (۱)

$$\sqrt{0/48} \times \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{\frac{48}{100}}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{\frac{48}{100}}{12}} = \sqrt{\frac{4}{100}} = \sqrt{\left(\frac{2}{10}\right)^2} = \frac{2}{10} = 0/2$$

گزینه (۲)

$$\frac{5}{14} \sqrt{28} \times \sqrt{63} = \frac{5}{14} \sqrt{28 \times 63} = \frac{5}{14} \sqrt{4 \times 7 \times 7 \times 9} = \frac{5}{14} \sqrt{(2 \times 7 \times 3)^2} = \frac{5}{14} \times 2 \times 7 \times 3 = 15$$

گزینه (۳)

$$\sqrt[3]{2^{11}} \times \sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{2^8} = \sqrt[3]{2^{11} \times 2^2 \times 2^8} = \sqrt[3]{2^{21}} = \sqrt[3]{(2^7)^3} = 2^7$$

گزینه (۳)

$$b = 8\sqrt{30} = \sqrt{8^2 \times 30} = \sqrt{64 \times 30} = \sqrt{1920}, \quad c = \sqrt{10 \times 3^5} = \sqrt{2430}$$

بنابراین $\sqrt{1920} < \sqrt{2010} < \sqrt{2430}$ پس $b < a < c$

گزینه (۲)

$$\sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = 2^2 = 4, \quad \sqrt{12^2} = 12, \quad \sqrt{49} = 7$$

در نتیجه عبارت موردنظر به این شکل ساده می‌شود

$$4 + 12 = 7 + \sqrt[3]{\quad} \Rightarrow 9 = \sqrt[3]{\quad} \Rightarrow \sqrt[3]{9^3} = \sqrt[3]{\quad} \Rightarrow \quad = 9^3 = 3^6$$

گزینه (۳)

$$\quad = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{4} \times \sqrt{6} \times \sqrt{8} \times \sqrt{10}}{\sqrt{1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10}}{\sqrt{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}} = \frac{\sqrt{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10}}{\sqrt{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}} = \sqrt{25} = \sqrt{3^2} = 3\sqrt{2}$$

گزینه (۳)

چون $\sqrt[3]{27} = 3$ ، پس $\sqrt[3]{n} < \sqrt[3]{27}$ ، یعنی $n < 27$. بنابراین می‌توانیم n را برابر با اعداد ۱، ۲، ... و ۲۶ بگیریم، در نتیجه ۲۶ عدد طبیعی مانند n در نابرابری صدق می‌کنند.



درس چهارم: جمع و تفریق رادیکالها



درست یا نادرست

(الف) ☒ ☐

(پ) ☒ مثال:

$$\sqrt{0} + \sqrt{1} = \sqrt{0+1}$$

(ب) ☒ مثال:

$$\sqrt[3]{0} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{0+2}$$

کامل کنید



(الف) $\sqrt{3}$

(ب) $\sqrt[3]{a}$

(پ) $-2\sqrt[3]{a}$

$$\begin{aligned} \sqrt{-a^3} + a\sqrt{-a} &= \sqrt{a^2 \times (-a)} + a\sqrt{-a} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{-a} + a\sqrt{-a} = |a| \sqrt{-a} + a\sqrt{-a} \\ &= -a\sqrt{-a} + a\sqrt{-a} = (-a+a)\sqrt{-a} = 0 \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{2 \times 4} - 1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{8} - 1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^3} - 1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2-1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

پرسش‌های دو گزینه‌ای

(الف) گزینه (۲)

$$\sqrt{12} - 2\sqrt{48} = \sqrt{12} - 2\sqrt{4 \times 12} = \sqrt{12} - 2 \times \sqrt{4} \times \sqrt{12} = \sqrt{12} - 4\sqrt{12} = -3\sqrt{12} = -3\sqrt{4 \times 3} = -3 \times \sqrt{4} \times \sqrt{3} = -6\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2^4} - \sqrt[3]{2 \times 3^3} = 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{2}$$

(ب) گزینه (۱)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{8} = \frac{1 - \sqrt{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{16}}{\sqrt{2}} = \frac{1-4}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(پ) گزینه (۲)

(ت) گزینه (۲)

$$\sqrt[3]{3} + \frac{3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} + 3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{27} + 3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{3+3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{6}{\sqrt[3]{9}} = \frac{6}{\sqrt[3]{9}} \times \frac{\sqrt[3]{9^2}}{\sqrt[3]{9^2}} = \frac{6\sqrt[3]{9^2}}{9} = \frac{2\sqrt[3]{9^2}}{3} = \frac{2\sqrt[3]{3^4}}{3} = \frac{2 \times 3 \times \sqrt[3]{3}}{3} = 2\sqrt[3]{3}$$

(۱)

الف) $2\sqrt{18} - 3\sqrt{3} + \sqrt{48} = 2\sqrt{9 \times 2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{16 \times 3} = 2\sqrt{9}\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{16}\sqrt{3} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$
 $= 6\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{2} + \sqrt{3}$

ب) $2\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - \frac{1}{6}\sqrt{125} = 2\sqrt{4 \times 5} - \frac{1}{3}\sqrt{9 \times 5} - \frac{1}{6}\sqrt{25 \times 5} = 2\sqrt{4}\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{9}\sqrt{5} - \frac{1}{6}\sqrt{25}\sqrt{5}$
 $= 2 \times 2 \times \sqrt{5} - \frac{1}{3} \times 3 \times \sqrt{5} - \frac{1}{6} \times 5 \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5} - \sqrt{5} - \frac{5}{6}\sqrt{5} = (4 - 1 - \frac{5}{6})\sqrt{5} = 0$

پ) $2\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{92} + \sqrt[3]{375} - 2\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{2^2 \times 23} + \sqrt[3]{125 \times 3} - 2\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3^2} \times 3 - \sqrt[3]{2^2 \times 23} + \sqrt[3]{5^3 \times 3} - 2\sqrt[3]{3}$
 $= 6\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2^2 \times 23} + 5\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} = (6 - 2 + 5)\sqrt[3]{3} = 9\sqrt[3]{3}$

ت) توجه کنید که $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ و $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. بنابراین عبارت موردنظر برابر است با

$(\frac{0}{3})(2\sqrt{2}) - (\frac{0}{5})(3\sqrt{2}) + \frac{0}{6}\sqrt{2} = -3/3\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{108} = 2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} = 0$

ث) $\sqrt{28} - \sqrt{80} - 2\sqrt{63} + 3\sqrt{45} = \sqrt{4 \times 7} - \sqrt{16 \times 5} - 2\sqrt{9 \times 7} + 3\sqrt{9 \times 5} = 2\sqrt{7} - 4\sqrt{5} - 2(3\sqrt{7}) + 3(3\sqrt{5}) = 8\sqrt{5} - 4\sqrt{7}$

ج) $\frac{0}{7}\sqrt{300} - \sqrt{\frac{3}{49}} + \frac{2}{3}\sqrt{108} = \frac{0}{7}(10\sqrt{3}) - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{49}} + \frac{2}{3}(6\sqrt{3}) = 10\sqrt{3} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{7} + 4\sqrt{3} = 10\sqrt{3} - \frac{3}{7} + 4\sqrt{3} = 14\sqrt{3} - \frac{3}{7}$

د) $\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{2000} = 3\sqrt[3]{2} - 3(2\sqrt[3]{2}) + 5(4\sqrt[3]{2}) + 10\sqrt[3]{2} = 27\sqrt[3]{2}$

ه) $6\sqrt{2} - (\sqrt{8} - (\sqrt{50} - \sqrt{162})) = 6\sqrt{2} - (2\sqrt{2} - (5\sqrt{2} - 9\sqrt{2})) = 6\sqrt{2} - (2\sqrt{2} - (-4\sqrt{2})) = 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 0$

ابتدا توجه کنید که $(3\sqrt{6} + 2\sqrt{8} - \sqrt{32})\sqrt{2} = 3\sqrt{12} + 2\sqrt{16} - \sqrt{64} = 3(2\sqrt{3}) + 2(4) - 8 = 6\sqrt{3}$

همچنین، $\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$. بنابراین عبارت موردنظر برابر صفر است.

ز) $(2\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 6\sqrt{6} - 2(2) + 3(3) - \sqrt{6} = 5\sqrt{6} + 5$

ح) توجه کنید که $\sqrt{600} = 10\sqrt{6}$ و $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. بنابراین عبارت موردنظر برابر است با

$(10\sqrt{6} + \sqrt{6} - 2\sqrt{6})\sqrt{6} = (9\sqrt{6})\sqrt{6} = 9 \times \sqrt{6}^2 = 9 \times 6 = 54$

ط) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) = (2\sqrt{3})(4\sqrt{2}) - (2\sqrt{3})(3\sqrt{3}) + (3\sqrt{2})(4\sqrt{2}) - (3\sqrt{2})(3\sqrt{3})$
 $= 8\sqrt{6} - 18 + 24 - 9\sqrt{6} = (-18 + 24) + (8\sqrt{6} - 9\sqrt{6}) = 6 - \sqrt{6}$

ی) راه حل اول توجه کنید که

$\sqrt{21} + \sqrt{7} - \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3} \times \sqrt{7} + \sqrt{7} - \sqrt{3} - 1 = (\sqrt{3} + 1)\sqrt{7} - (\sqrt{3} + 1) = (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{7} - 1)$

$\frac{\sqrt{21} + \sqrt{7} - \sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} - \sqrt{7} = \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{7} - 1)}{\sqrt{3} + 1} - \sqrt{7} = \sqrt{7} - 1 - \sqrt{7} = -1$

بنابراین



راه حل دوم توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{21} + \sqrt{7} - \sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} - \sqrt{7} = \frac{\sqrt{21} + \sqrt{7} - \sqrt{3} - 1 - (\sqrt{3} + 1)\sqrt{7}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{21} + \sqrt{7} - \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3}\sqrt{7} - \sqrt{7}}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{21} + \sqrt{7} - \sqrt{3} - 1 - \sqrt{21} - \sqrt{7}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{-\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{-(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} + 1} = -1$$

$$a = \frac{\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{5}}{1 - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5}}{1 - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{2} - 1)}{1 - \sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{5}$$

(۲) توجه کنید که

$$a^3 = (-\sqrt[3]{5})^3 = -5$$

(۳)

الف) $\sqrt{12a} + \sqrt{48a} - \sqrt{147a} = 2\sqrt{3a} + 4\sqrt{3a} - 7\sqrt{3a} = -\sqrt{3a}$

ب) $(\sqrt[3]{125a} - \sqrt[3]{8a}) - (\sqrt[3]{27a} - \sqrt[3]{64a}) = (5\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{a}) - (3\sqrt[3]{a} - 4\sqrt[3]{a}) = 3\sqrt[3]{a} - (-\sqrt[3]{a}) = 4\sqrt[3]{a}$

پ) $\sqrt[3]{a^7} - a\sqrt[3]{a} + a\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{a^6 \times a} - a\sqrt[3]{a} + a\sqrt[3]{a^3 \times a} + \sqrt[3]{a^3 \times a}$

$$= \sqrt[3]{a^6} \sqrt[3]{a} - a\sqrt[3]{a} + a^2 \sqrt[3]{a} + a\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{(a^2)^3} \sqrt[3]{a} - a\sqrt[3]{a} + a^2 \sqrt[3]{a} + a\sqrt[3]{a}$$

$$= a^2 \sqrt[3]{a} - a\sqrt[3]{a} + a^2 \sqrt[3]{a} + a\sqrt[3]{a} = (a^2 - a + a^2 + a)\sqrt[3]{a} = 2a^2 \sqrt[3]{a}$$

(۴) ابتدا توجه کنید که

$$a - b = (\sqrt{5} - \sqrt{3}) - (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = -2\sqrt{3}, \quad a + b = (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{5}$$

$$(a - b)(a + b) = (-2\sqrt{3})(2\sqrt{5}) = -4\sqrt{3 \times 5} = -4\sqrt{15}$$

بنابراین

(۵)

الف) $\frac{3}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2 \times 6} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

ب) $\frac{15}{2\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{15\sqrt[3]{9}}{2 \times 3} = \frac{5\sqrt[3]{9}}{2}$

ب) $\frac{6}{\sqrt[3]{4}} = \frac{6}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{6\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{6\sqrt[3]{2}}{2} = 3\sqrt[3]{2}$

ت) $\frac{4}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$

(۶) الف) راه حل اول توجه کنید که

$$\frac{2 + \sqrt{6}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{6}{2}} - \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{3}$$

راه حل دوم توجه کنید که $\frac{2 + \sqrt{6}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{3}$

$$\frac{2 + \sqrt{6}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{2 + \sqrt{6} - \sqrt{2}^2}{\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{6} - 2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$$

راه حل سوم توجه کنید که

ب) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}, \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$$\frac{\sqrt{10}}{5} - \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10} - 5\sqrt{10} + \sqrt{10}}{10} = \frac{-2\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} + \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{9 + (\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \quad (\text{پ})$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \quad (\text{ت})$$

$$\sqrt{8} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{32}} = 2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{32}} = 2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{32}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8} = 2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{19\sqrt{2}}{8} \quad (\text{ث})$$

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{ج})$$

$$\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2 + \sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{1 + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{1 + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{(1 + \sqrt[3]{2})\sqrt[3]{2}}{2} \quad (\text{د})$$

(۷)

$$\frac{9}{\sqrt[3]{3}} = \frac{9}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{9\sqrt[3]{9}}{3} = 3\sqrt[3]{9}, \quad \frac{30}{\sqrt[3]{10}} = \frac{30}{\sqrt[3]{10}} \times \frac{\sqrt[3]{10^2}}{\sqrt[3]{10^2}} = \frac{30\sqrt[3]{100}}{10} = 3\sqrt[3]{100}$$

چون $3\sqrt[3]{100} > 3\sqrt[3]{9}$ ، پس $\frac{9}{\sqrt[3]{3}} > \frac{30}{\sqrt[3]{10}}$

تمرین های ویژه

۱) ابتدا توجه کنید که از $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$ نتیجه می شود $4a = 3b$. بنابراین

$$\sqrt{a} + \sqrt{3b} = \sqrt{a} + \sqrt{4a} = \sqrt{a} + \sqrt{4}\sqrt{a} = \sqrt{a} + 2\sqrt{a} = 3\sqrt{a} \Rightarrow 3\sqrt{a} = 3\sqrt{15}$$

پس $\sqrt{a} = \sqrt{15}$ ، یعنی $a = 15$. بنابراین $4 \times 15 = 3b$ ، یعنی $b = 20$. به این ترتیب $a + b = 35$.

$$\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a})^2 \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{ab}$$

۲) توجه کنید که

بنابراین $\sqrt{ab} = 4$ ، پس $ab = 16$.

۳)

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{a+25}$$

$$\sqrt[3]{2^3 \times 2} + \sqrt[3]{2 \times 3^3} - \sqrt[3]{4^3 \times 2} = \sqrt[3]{a+25} \Rightarrow 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{a+25} \Rightarrow (2+3-4)\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{a+25}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{a+25} \Rightarrow 2 = a+25 \Rightarrow a = -23$$



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. گزینه (۴)

$$\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{72} = 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

۲. گزینه (۱)

$$\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{432} = 3\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

۳. گزینه (۱)

$$\frac{\sqrt{24} - \sqrt{54} + \sqrt{96}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6} - 3\sqrt{6} + 4\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{\frac{6}{2}} = 3\sqrt{3}$$

۴. گزینه (۱)

$$4\sqrt{2}(2 - \sqrt{18}) - 7\sqrt{2} = 8\sqrt{2} - 4\sqrt{16} - 7\sqrt{2} = \sqrt{2} - 16$$

۵. گزینه (۴)

$$(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 2 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 3 = -1 - \sqrt{3}$$

۶. گزینه (۱)

$$\frac{2\sqrt[3]{0/135} + \sqrt[3]{0/32}}{\sqrt[3]{40}} = \frac{2(0/3\sqrt[3]{5}) + 0/4\sqrt[3]{5}}{2\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{2\sqrt[3]{5}} = \frac{1}{2}$$

۷. گزینه (۲)

چون $a = \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} = 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$ ، بنابراین $a^3 = 2$ و $a^6 = (a^3)^2 = 4$.

۸. گزینه (۴)

ابتدا توجه کنید که

$$\frac{6}{\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{14}} \times \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{14}}{14} = \frac{3\sqrt{14}}{7}$$

اکنون توجه کنید که $\frac{3\sqrt{2}}{7} \neq \frac{6}{\sqrt{14}}$ ، $\sqrt{\frac{18}{7}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{14}}{7}$ ، $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{14}}{7}$ ،

۹. گزینه (۴)

$$\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

۱۰. گزینه (۴)

$$\sqrt{54} + \sqrt{24} - \frac{6}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - \frac{6}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{6} - \frac{6\sqrt{6}}{6} = 4\sqrt{6}$$

امتحان نہایی فصل چهارم

الف) نادرست
ب) نادرست
ج) نادرست
د) نادرست

ت) درست
ث) درست
ج) درست

پ) نادرست
ج) درست
د) نادرست

ب) نادرست
ج) نادرست
د) درست

الف) ۴۱

ث) -۵

ج) $2\sqrt{6}$

د) $6\sqrt{2}$

ص) $\frac{1}{49}$

ض) $-xy$

الف) گزینه (۳)

ث) گزینه (۲)

ب) گزینه (۳)

پ) گزینه (۴)

ت) گزینه (۱)

گزینه (۴) $\left(\frac{2}{3}\right)^{16} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{11} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-11} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{3^{-11}}{2^{-11}}\right) = \frac{2^5 \times 3^{-11}}{2^{-11} \times 3^5}$

گزینه (۲) $\sqrt{48} - 2\sqrt{3} = \sqrt{16 \times 3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

گزینه (۲) $\frac{2^8}{2^{-2}} = 2^8 \times 2^2 = 2^{10} = 1024$

د) گزینه (۱)

ج) گزینه (۲)

گزینه (۳) $\left(\frac{X}{Y}\right)^{-11} \times \left(\frac{Y}{X}\right)^{11} = \left(\frac{Y}{X}\right)^{11} \left(\frac{Y}{X}\right)^{11} = \left(\frac{Y}{X}\right)^{22}$

د) گزینه (۳)

ج) گزینه (۳)

ص) گزینه (۱)

گزینه (۴) $\sqrt[3]{8 \times 2 \sqrt{9}} = 2 \times 2 \times 3 = 12$

س) گزینه (۱)

۴

الف) $\frac{9^{-2}}{3^2} = \frac{9^{-2}}{9} = 9^{-2-1} = 9^{-3}$

ب) $\left(\frac{1}{5}\right)^{10} \times 25^{-4} = 5^{-10} \times (5^2)^{-4} = 5^{-10} \times 5^{-8} = 5^{-18}$

پ) $\frac{4^{-9}}{4^{-3}} = 4^{-9-(-3)} = 4^{-6}$

ت) $\frac{3^4 \times 9^3}{3^{-2}} = \frac{3^4 \times (3^2)^3}{3^{-2}} = \frac{3^4 \times 3^6}{3^{-2}} = 3^{4+6-(-2)} = 3^{12}$

ث) $\frac{8^6 \times 2^{-3}}{2^7 \times 8^{-4}} = \frac{(2^3)^6 \times 2^{-3}}{2^7 \times (2^3)^{-4}} = \frac{2^{18} \times 2^{-3}}{2^7 \times 2^{-12}} = \frac{2^{15}}{2^{-5}} = 2^{15-(-5)} = 2^{20}$

ج) $\frac{16^{-2} \times 2^{-1}}{8^{-4} \times 4^2} = \frac{(2^4)^{-2} \times 2^{-1}}{(2^3)^{-4} \times (2^2)^2} = \frac{2^{-8} \times 2^{-1}}{2^{-12} \times 2^4} = \frac{2^{-9}}{2^{-8}} = 2^{-9-(-8)} = 2^{-1}$

د) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \times (7^2)^5 = 3^{10} \times 7^{10} = (3 \times 7)^{10} = 21^{10}$



$$ج) \frac{\left(\frac{4}{9}\right)^4 \times \left(\frac{2}{9}\right)^{-4}}{2^{-3}} = \frac{\left(\frac{4}{9}\right)^4 \times \left(\frac{9}{2}\right)^4}{2^{-3}} = \frac{\left(\frac{4 \times 9}{9 \times 2}\right)^4}{2^{-3}} = \frac{2^4}{2^{-3}} = 2^{4-(-3)} = 2^7$$

$$خ) 125 \times 5^{-7} = 5^3 \times 5^{-7} = 5^{3-7} = 5^{-4}$$

$$د) \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \times \left(\frac{3}{2}\right)^6 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 \times \left(\frac{3}{2}\right)^6 = \left(\frac{3}{2}\right)^{5+6} = \left(\frac{3}{2}\right)^{11}$$

$$ذ) (5^2)^{-3} \times 125^4 = 5^{-6} \times (5^3)^4 = 5^{-6} \times 5^{12} = 5^{-6+12} = 5^6$$

$$ز) \frac{3^7}{12-3^2} = \frac{3^7}{12-9} = \frac{3^7}{3} = 3^{7-1} = 3^6$$

$$ز) \frac{15^4 + 15^{-4}}{3^7 \times 3} = \frac{15^4 + 15^{-4}}{3^{7+1}} \times \frac{15^4}{15^4} = \frac{15^8 + 1}{3^8 \times 15^4} = \frac{15^8}{3^8 \times 15^4} + \frac{1}{3^8 \times 15^4} = \frac{15^{8-4}}{3^8} + \frac{1}{3^8 \times 3^4 \times 5^4} = \frac{15^4}{3^8} + \frac{1}{3^{12} \times 5^4}$$

$$= \frac{5^4 \times 3^4}{3^8} + \frac{1}{3^{12} \times 5^4} = 5^4 \times 3^{4-8} + \frac{1}{3^{12} \times 5^4} = 5^4 \times 3^{-4} + \frac{1}{3^{12} \times 5^4} = \frac{5^4}{3^4} + \frac{1}{3^{12} \times 5^4} = \left(\frac{5}{3}\right)^4 + \frac{1}{3^{12} \times 5^4}$$

$$س) \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{5 \times 1}{3 \times 6}\right)^2 = \left(\frac{5}{18}\right)^2$$

$$ش) \left(\frac{5}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^{-7} = \left(\frac{5}{3}\right)^4 \times \left(\frac{6}{1}\right)^{-7} = \left(\frac{5}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^7 = \left(\frac{5}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3 \times 2}\right)^7 = \left(\frac{5}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{5}{3}\right)^{4+7} = \left(\frac{5}{3}\right)^{11}$$

$$ص) 10^3 \times 2^{-4} \times 10 = 10^3 \times 10 \times 2^{-4} = (10^3 \times 10) \times 2^{-4} = 10^4 \times 2^{-4} = (5 \times 2)^4 \times 2^{-4} = 5^4 \times 2^4 \times 2^{-4} = 5^4 \times 2^{4-4} = 5^4$$



$$الف) \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$ب) \frac{5}{\sqrt{8}} = \frac{5}{\sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{5\sqrt{8}}{8} = \frac{5 \times 2\sqrt{2}}{8} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$ث) \frac{6}{5\sqrt{x}} = \frac{6}{5\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{6\sqrt{x}}{5x}$$

$$ج) \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{3 \times 2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{6}$$

$$خ) \frac{2}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{a^2}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{2\sqrt[3]{a}}{a}$$

$$ب) \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{2 \times 5} = \frac{\sqrt{15}}{10}$$

$$ت) \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ج) \frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{2^2}}{2} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$د) \frac{-2\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{-2\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{-2\sqrt{35}}{7}$$



$$الف) \sqrt{20} + \sqrt{45} = \sqrt{4 \times 5} + \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{4}\sqrt{5} + \sqrt{9}\sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

$$ب) 7\sqrt{12} - \sqrt{75} = 7\sqrt{4 \times 3} - \sqrt{25 \times 3} = 7 \times \sqrt{4} \times \sqrt{3} - \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 14\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = (14-5)\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$پ) 2\sqrt[3]{25} \times 3\sqrt[3]{5} = 2 \times 3 \times \sqrt[3]{25 \times 5} = 6 \times \sqrt[3]{25 \times 5} = 6\sqrt[3]{125} = 6 \times 5 = 30$$

$$ت) \sqrt{32} - 5\sqrt{2} = \sqrt{16 \times 2} - 5\sqrt{2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (4-5)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$ث) \sqrt{50} + \sqrt{8} = \sqrt{25 \times 2} + \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} + \sqrt{4}\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (5+2)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

$$ج) 5\sqrt{3} - \sqrt{12} = 5\sqrt{3} - \sqrt{4 \times 3} = 5\sqrt{3} - \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (5-2)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$د) \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{2 \times (-4)} = \sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$$

$$\begin{aligned} \text{ج)} \quad -5\sqrt{32} + 2\sqrt{18} &= -5\sqrt{16 \times 2} + 2\sqrt{9 \times 2} = -5 \times \sqrt{16} \times \sqrt{2} + 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} \\ &= -5 \times 4 \times \sqrt{2} + 2 \times 3 \times \sqrt{2} = -20\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = (-20 + 6)\sqrt{2} = -14\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{خ)} \quad \frac{\sqrt[3]{60} \times \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{20}} = \frac{\sqrt[3]{60}}{\sqrt[3]{20}} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{\frac{60}{20}} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$\begin{aligned} \text{د)} \quad 2\sqrt{45} + \sqrt{72} - 3\sqrt{50} - \sqrt{20} &= 2\sqrt{9 \times 5} + \sqrt{36 \times 2} - 3\sqrt{25 \times 2} - \sqrt{4 \times 5} \\ &= 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{5} + \sqrt{36} \times \sqrt{2} - 3 \times \sqrt{25} \times \sqrt{2} - \sqrt{4} \times \sqrt{5} \\ &= 2 \times 3 \times \sqrt{5} + 6 \times \sqrt{2} - 3 \times 5 \times \sqrt{2} - 2\sqrt{5} \\ &= 6\sqrt{5} + 6\sqrt{2} - 15\sqrt{2} - 2\sqrt{5} = (6 - 2)\sqrt{5} + (6 - 15)\sqrt{2} = 4\sqrt{5} - 9\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{ذ)} \quad \sqrt[3]{250} - 4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{125 \times 2} - 4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5^3} \times \sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = (5 - 4)\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$$

$$\text{ر)} \quad \frac{\sqrt[3]{80}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{80}}{\sqrt[3]{2 \times 5}} = \frac{\sqrt[3]{80}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\frac{80}{10}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

$$\text{ز)} \quad \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} = (2 + 2)\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$$

$$\text{س)} \quad \sqrt{5}(3\sqrt{10} + \sqrt{2}) = \sqrt{5}(3\sqrt{5 \times 2} + \sqrt{2}) = \sqrt{5}(3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} + \sqrt{2}) = 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} + \sqrt{5} \times \sqrt{2} = 15\sqrt{2} + \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} \text{ش)} \quad 2\sqrt{50} + \sqrt{32} - 2\sqrt{72} &= 2\sqrt{25 \times 2} + \sqrt{16 \times 2} - 2\sqrt{36 \times 2} = 2 \times \sqrt{25} \times \sqrt{2} + \sqrt{16} \times \sqrt{2} - 2 \times \sqrt{36} \times \sqrt{2} \\ &= 2 \times 5 \times \sqrt{2} + 4 \times \sqrt{2} - 2 \times 6 \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = (10 + 4 - 12)\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ص)} \quad \frac{5\sqrt{6} - \sqrt{54}}{\sqrt{3}} &= \frac{5\sqrt{6} - \sqrt{54}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{6 \times 3} - \sqrt{54 \times 3}}{3} = \frac{5\sqrt{18} - \sqrt{162}}{3} = \frac{5\sqrt{9 \times 2} - \sqrt{81 \times 2}}{3} \\ &= \frac{5 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} - \sqrt{81} \times \sqrt{2}}{3} = \frac{5 \times 3 \times \sqrt{2} - 9 \times \sqrt{2}}{3} = \frac{15\sqrt{2} - 9\sqrt{2}}{3} = \frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{ض)} \quad \frac{3\sqrt{60} - \sqrt{60}}{4\sqrt{3} \times \sqrt{5}} = \frac{(3-1)\sqrt{60}}{4\sqrt{3} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{60}}{4\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{60}}{2\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{4 \times 15}} = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{60}} = 1$$

$$\text{ط)} \quad \frac{\sqrt[3]{-54}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{-27 \times 2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(-3)^3 \times 2}}{\sqrt[3]{2}} = -3$$

$$\text{الف)} \quad 980000000 = 9/8 \times 10^8$$

$$\text{ب)} \quad 123/4 \times 10^7 = 1/234 \times 10^2 \times 10^7 = 1/234 \times 10^9$$

$$\text{پ)} \quad 535353 \times 10^{-7} = 5/35353 \times 10^5 \times 10^{-7} = 5/35353 \times 10^{-2}$$

$$\text{ت)} \quad 0.000437 = 4/37 \times 10^{-4}$$

$$\text{ث)} \quad 983/1 = 9/831 \times 10^2$$

$$\text{ج)} \quad 0.000135 = 1/35 \times 10^{-4}$$

$$\text{د)} \quad 1398/0.301 = 1/398.301 \times 10^3$$

$$\text{ح)} \quad 9 \times 10^{-6} \times 200 = (9 \times 200) \times 10^{-6} = 1800 \times 10^{-6} = 1/8 \times 10^3 \times 10^{-6} = 1/8 \times 10^{-3}$$

$$\text{الف)} \quad 6/95 \times 10^5$$

$$\text{ب)} \quad 9/17 \times 10^7$$

$$\text{پ)} \quad 1/6 \times 10^{-3}$$

$$\text{ت)} \quad 7 \times 10^{-6}$$

$$\text{ث)} \quad 1/43 \times 10^5$$

$$\text{ج)} \quad 6/2 \times 10^{-4} \times 10^2 = 6/2 \times 10^{-2}$$



$$\left(-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-1} = \left(-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{-1} = \left(-\frac{9}{4}\right)^{-1} = -\frac{4}{9}$$

$$2^{-1} + 5^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$$

پاسخ اشکان درست است.

الف) مثبت

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \times (1/5)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^8$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^8 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^8 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^8 \Rightarrow x+3=8 \Rightarrow x=5$$

$$\frac{1/4 \times 10^9}{1/3 \times 10^7} = \frac{1/4}{1/3} \times \frac{10^9}{10^7} = 1/0.77 \times 10^{9-7} = 1/0.77 \times 10^2$$

الف) چون $(\frac{2}{10})^{-2} = (\frac{2}{10})^{-2} = (\frac{10}{2})^2 = 5^2$ پس $(\frac{2}{10})^{-2} = 5^2$. از طرف دیگر چون $2^{-1} = \frac{1}{2}$ و $2^{-2} = \frac{1}{4}$ پس

$$2^{-1} > 2^{-2}$$

$$\text{مساحت: } 5\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 5 \times 5 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 25 \times 3 = 75 \text{ cm}^2$$

$$\text{محیط: } 4 \times (5\sqrt{3}) = 20\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{الف) } 2 \times 10^{-6}$$

$$\sqrt[3]{-16} \div \sqrt[3]{2} = \frac{-\sqrt[3]{16 \times 2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{-\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{2^5} = -2$$

الف) ۱۵

$$1) 2^{-3} + 4^{-1} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1+2}{8} = \frac{3}{8}$$

$$2) \frac{\sqrt[3]{-4} \times \sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{-\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}} = -\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{4 \times 2} = -\sqrt[3]{8} = -2$$

$$\frac{5}{\sqrt[3]{9}} = \frac{5}{\sqrt[3]{3^2}} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{5\sqrt[3]{3}}{3}$$

ب)

ستون (الف)	ستون (ب)
ab^{-1}	-2
$\sqrt[3]{-8}$	$\frac{a}{b}$
$\frac{a-b}{b-a}$	$\frac{1}{ab}$
	وجود ندارد
	1
	-1



$$\sqrt[3]{64} > \sqrt[3]{-27}$$

$$3\sqrt{5} \equiv \sqrt{45}$$

$$\sqrt{27} \times \sqrt{3} > \sqrt{(-5)^2}$$



توجه شود $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ بنابراین

توجه شود $\sqrt{27} \times \sqrt{3} = \sqrt{81} = 9$ و $\sqrt{(-5)^2} = 5$ پس



امتحان نوبت اول

۱ الف گزینه (۱)

ب گزینه (۴)

پ گزینه (۴)

ت گزینه (۴)

۲ الف نادرست

ب نادرست

پ نادرست

ت درست

۳ الف تهی

ب $\mathbb{R}$

پ اثبات

ت $-\frac{1}{3}$

۴

الف $A = \{2n-1 | n \in \mathbb{N}\}$ ب $B = \{4, 7, 10, 13, \dots\}$

۵

الف $A \cap B = \{3, 4\}$ ب $B - A = \{5\}$ پ $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$

۶

$\{-\frac{1}{3}, 5, 0/5\} = \{\sqrt[3]{125}, -4, \frac{1}{3}\}$

۷

احتمال $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\{3, 5\}$ = مطلوب $= 6$ = کل حالات

۸

الف $\frac{3}{5} < \frac{3+5}{5+7} < \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{3}{5} < \frac{8}{12} < \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{5}{7}$
 $\frac{3}{5} < \frac{3+2}{5+3} < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3}{5} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3}$
 $\frac{5}{8} < \frac{5+2}{8+3} < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{5}{8} < \frac{7}{11} < \frac{2}{3}$

بنابراین $\frac{3}{5} < \frac{5}{8} < \frac{7}{11} < \frac{2}{3} < \frac{5}{7}$

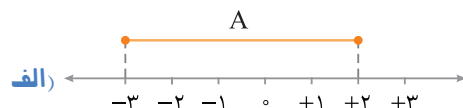
ب $\sqrt{3} < \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{7}$

$|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$

۹ الف چون $\sqrt{4} < \sqrt{5}$ پس $2 < \sqrt{5}$ بنابراین

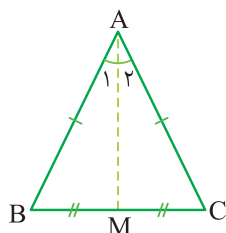
ب $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = (\sqrt{3}-1)$

۱۰



ب $B = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$

۱۱



فرض : $BM = MC$, $AB = AC$

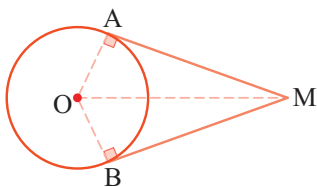
حکم : $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} BM = MC \\ AB = AC \\ AM \text{ مشترک} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ABM \cong \triangle ACM \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \text{AM نیم سازه است}$$

۱۲

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ MB = NC \\ \hat{B} = \hat{C} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{بنایه حالت وز}} \triangle MBH \cong \triangle NCH' \Rightarrow BH = CH'$$

۱۳



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ OM \text{ (مشترک)} \\ OA = OB \text{ (شعاع)} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{وض}} \triangle AMO \cong \triangle BMO \Rightarrow AM = BM$$

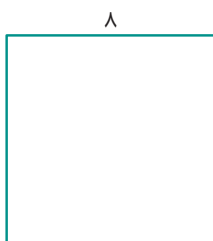
۱۴



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_2 + \hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180^\circ \\ \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 180^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = \hat{O}_3 + \hat{O}_4 \Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{O}_4$$

۲ پاسخ داریم. ۱۵



نسبت تشابه: $\frac{4}{2} = 2$



نسبت تشابه: $\frac{2}{2} = 1$

۱۶

$$\frac{2^5 x^3 y^{-4}}{4 x^{-5} y^2} = \frac{2^5}{2^2} \times \frac{x^3}{x^{-5}} \times \frac{y^{-4}}{y^2} = 2^{5-2} \times x^{3-(-5)} \times y^{-4-2} = 2^3 x^8 y^{-6} = 8 x^8 y^{-6}$$

۱۷

الف) $5/2 \times 10^{-5}$

ب) ۳۴۰۰۰۰



الف) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$

ب)

۱) $\sqrt{128} - 3\sqrt{72} = \sqrt{64 \times 2} - 3\sqrt{36 \times 2} = \sqrt{64} \times \sqrt{2} - 3 \times \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 8\sqrt{2} - 3 \times 6 \times \sqrt{2} = 8\sqrt{2} - 18\sqrt{2}$
 $= (8 - 18)\sqrt{2} = -10\sqrt{2}$

۲) $15\sqrt[3]{2} \div 3\sqrt[3]{16} = \frac{15\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{8 \times 2}} = \frac{5\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8 \times 2}} = \frac{5\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{5}{2}$

فصل پنجم

عبارت‌های جبری





درس اول: عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد



تمرین

درست یا نادرست



(ث) ☒

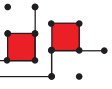
(ب) ☒

(پ) ☒

(ب) ☒

(الف) ☒

کامل کنید



(ب) بزرگ‌ترین درجه را در میان جمله‌های چندجمله‌ای دارد.

(الف) ۳

(پ) $250x^4y^5$ (ب) $4xy^2 - 2x^2y$ (ث) $(2x+y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$

پرسش‌های دو گزینه‌ای

(ث) گزینه (۲)

(ب) گزینه (۲)

(پ) گزینه (۲)

(ب) گزینه (۱)

(الف) گزینه (۲)

تمرین‌های تشریحی

(۱)

(الف) تک جمله‌ای است.

(پ) تک جمله‌ای است.

(ث) تک جمله‌ای نیست.

(ج) تک جمله‌ای است.

(۲)

(الف) $4x^3y^4z^4$

(۳)

(الف) $-\frac{1}{2}x^2yz$

(ب) تک جمله‌ای است.

(ث) تک جمله‌ای است.

(ج) تک جمله‌ای نیست.

(ج) تک جمله‌ای نیست.

(ب) $18x^4y^3z$

(ث) $-\frac{3}{5}x^2y^2$

(پ) $4a^9b^3$

(ب) $-14a^3b^5$

$$(ث) (\sqrt{2}ab)^2(-bc) = (\sqrt{2}ab)(\sqrt{2}ab)(-bc) = (\sqrt{2}\sqrt{2}ab ab)(-bc) = (2a^2b^2)(-bc) = -2a^2b^2c$$

$$(ج) (\sqrt{2}ab^2)^3(-ab)(\frac{1}{\sqrt{2}}b) = (\sqrt{2}ab^2)(\sqrt{2}ab^2)(\sqrt{2}ab^2)(-ab)(\frac{1}{\sqrt{2}}b) = (2\sqrt{2}a^3b^6)(-ab)(\frac{1}{\sqrt{2}}b)$$

$$= (2\sqrt{2}a^4b^7)(\frac{1}{\sqrt{2}}b) = -2a^4b^8$$

۴

درجهٔ تک جمله‌ای	درجه نسبت به a	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x	متغیرها	تک جمله‌ای
۳	۱	۰	۲	x و a	$-3ax^2$
۵	۰	۲	۳	x و y	$\sqrt{2}x^3y^2$
۶	۱	۳	۲	a و x, y	$\frac{1}{2}ax^2y^3$

۵

- الف) $(x^2y)^2z = x^4y^2z$ درجهٔ ۷
 ب) $(xy)^3z^4 = x^3y^3z^4$ درجهٔ ۱۰
 ج) $x^2y^3z^2$ درجهٔ ۷
 د) xy^6 درجهٔ ۷

۶

- الف) $4x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$
 ب) $-3x^2 - x + 5$
 ج) $-4x^3y^2 - x^2y^2 - 3xy + 3y + 4$
 د) $6x^2y^2 - 6x^2y - 5xy + 21$

۷

- الف) $x + 3$
 ب) $-\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b$
 ج) $-3x - 2y + 7$
 د) $xy + 3x - 3y + 2$

۸

- الف) $\frac{25}{36}x^2$
 ب) $\frac{7}{8}x^2y$
 ج) $\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^3$
 د) $10abc^2 - 3ab^2c$

۹

درجهٔ چندجمله‌ای	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x	چندجمله‌ای
۴	۳	۲	$-3x^2y + xy^3$
۵	۴	۲	$xy + x^2y + 3xy^4$

۱۰

الف) $x^3 - 2x^4 + x^2 - 3x^6 + x - 1 = -3x^6 - 2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$

ب) $xy - \frac{1}{3}x^2y + \sqrt{2}x^3y^3 =$

بر حسب y: $\sqrt{2}x^3y^3 + xy - \frac{1}{3}x^2y$

بر حسب x: $\sqrt{2}x^3y^3 - \frac{1}{3}x^2y + xy$

۱۱

$A - 2B + C = (2x^2 - x + 1) - 2(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x) + x^3 - x^2 + x + 1 = 2x^2 - x + 1 - x^3 + \frac{2}{3}x + x^3 - x^2 + x + 1$
 $= x^2 + \frac{2}{3}x + 2$



(۱۲)

الف $(\frac{1}{3}xy^2)(x^2y) - \frac{1}{2}(xy)^3 = \frac{1}{3}xy^2x^2y - \frac{1}{2}x^2y^3 = \frac{1}{3}x^3y^3 - \frac{1}{2}x^2y^3 = (\frac{1}{3} - \frac{1}{2})x^2y^3 = -\frac{1}{6}x^2y^3$

ب $(\sqrt{2}a)^2(-b)^3 - (\sqrt[3]{2}a)^2\sqrt[3]{2}b^3 = -2a^2b^3 + (-\sqrt[3]{2}a^2)(\sqrt[3]{2}b^3) = -2a^2b^3 + (-\sqrt[3]{2 \times 2}a^2b^3)$
 $= -2a^2b^3 - \sqrt[3]{4}a^2b^3 = -2a^2b^3 - 2a^2b^3 = -4a^2b^3$

(۱۳)

الف $rab^2 - 3a(\frac{b}{2}) + 3b + 3a \times 2b^2 - 2b(a+1) = rab^2 - \frac{ab}{2} + 3b + 6ab^2 - 2ab - 2b = 8ab^2 - \frac{5}{2}ab + b$

ب $ab^2 - \cancel{a^2b} - \cancel{a^2b} + a^3 + a^2b - ab^2 + a^2 = a^3 + a^2b$

(۱۴)

مساحت دوزنقه داده شده برابر است با مجموع مساحت مستطیل و مثلث قائم‌الزاویه، توجه کنید که طول یکی از ضلع‌های زاویه قائمه در مثلث قائم‌الزاویه برابر $6xy$ و طول وتر این مثلث برابر $10xy$ است. بنابراین از قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود طول ضلع دیگر این زاویه قائمه برابر است با $\sqrt{(10xy)^2 - (6xy)^2} = 8xy$. در نتیجه مساحت شکل موردنظر برابر است با

$(6xy)(8xy) + \frac{1}{2}(6xy)(8xy) = 72x^2y^2$

(۱۵)

$4x^2y^2 + \text{○} + 9xy + 2x^2y^2 = 6xy(1+xy)$

$6x^2y^2 + \text{○} + 9xy = 6xy + 6x^2y^2 \Rightarrow \text{○} = -3xy$

$(2x-1)(x+3) = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3$

(۱۶) الف) توجه کنید

بنابراین چون تساوی داده شده به ازای هر مقدار از x درست است، پس این تساوی یک اتحاد است

ب $3x - 1 = 2x + 1 \Rightarrow 3x - 2x = 2 \Rightarrow x = 2$

چون تساوی داده شده فقط به ازای $x = 2$ درست است، پس این تساوی یک معادله است.

(۱۷)

الف $(x-3)^2 = x^2 - 2(x)(3) + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

ب $(2x - \frac{3}{2})^2 = (2x)^2 - 2(2x)(\frac{3}{2}) + (\frac{3}{2})^2 = 4x^2 - 6x + \frac{9}{4}$

پ $(xy - 2x^2y)^2 = (xy)^2 - 2(xy)(2x^2y) + (2x^2y)^2 = x^2y^2 - 4x^3y^2 + 4x^4y^2$

ت $(x - \frac{2}{x})^2 = x^2 - 2(x)(\frac{2}{x}) + (\frac{2}{x})^2 = x^2 - 4 + \frac{4}{x^2}$

(۱۸) الف) بنابر اتحاد مربع دو جمله‌ای،

$(-7x + 2y)^2 = (-7x)^2 + 2(-7x)(2y) + (2y)^2 = 49x^2 - 28xy + 4y^2$

بنابراین عبارت موردنظر می‌شود

$(49x^2 - 28xy + 4y^2) - 42x^2 + 28xy = 7x^2 + 4y^2$

ب) بنابر اتحاد مربع دو جمله‌ای،

$(-3x - y)^2 = (-3x)^2 - 2(-3x)(y) + y^2 = 9x^2 + 6xy + y^2$

بنابراین عبارت موردنظر می‌شود

$-7y^2 + 6xy - (9x^2 + 6xy + y^2) = -9x^2 - 8y^2$

(۱۹) الف)

$$\text{سمت چپ} = (\Delta x - 2)^2 - (-3x - 7)^2 = 25x^2 - 20x + 4 - (9x^2 + 42x + 49) = 16x^2 - 62x - 45$$

$$\text{سمت راست} = (4x - 9)^2 + 2(\Delta x - 63) = 16x^2 - 72x + 81 + 10x - 126 = 16x^2 - 62x - 45$$

بنابراین دو طرف تساوی موردنظر برابرند.

(ب)

$$\text{سمت چپ} = (2x - 1)^2 - (2 - x)^2 - 14x = 4x^2 - 4x + 1 - (4 - 4x + x^2) - 14x = 3x^2 - 14x - 3$$

$$\text{سمت راست} = (\Delta - 2x)^2 - (x - 3)^2 - 19 = 25 - 20x + 4x^2 - (x^2 - 6x + 9) - 19 = 3x^2 - 14x - 3$$

بنابراین دو طرف تساوی موردنظر برابرند.

(۲۰)

$$6ab + (a - b)^2 = 6ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + 4ab + b^2 = (\sqrt{2})^2 + 4(\sqrt{2})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 = 2 + 4\sqrt{6} + 3 = 5 + 4\sqrt{6}$$

$$(a - b)^2 + 5ab - (a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 5ab - (a^2 + 2ab + b^2) = ab \quad \text{(۲۱) ابتدا توجه کنید که}$$

$$(\sqrt{2})(-\sqrt{3}) = -\sqrt{6} \quad \text{مقدار این عبارت به ازای } a = \sqrt{2} \text{ و } b = -\sqrt{3} \text{ برابر است با}$$

(۲۲) بنابر اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 3 + 2(\sqrt{3})(\sqrt{2}) + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 3 - 2(\sqrt{3})(\sqrt{2}) + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$$

بنابراین مقدار عبارت موردنظر برابر است با

$$\frac{(\Delta + 2\sqrt{6}) - (\Delta - 2\sqrt{6})}{(\Delta + 2\sqrt{6}) + (\Delta - 2\sqrt{6})} = \frac{4\sqrt{6}}{10} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

(۲۳) ابتدا توجه کنید که $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ ، بنابراین

$$x^2 + 4x + m + 4 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow m + 4 = 4 \Rightarrow m = 0$$

(۲۴) ابتدا توجه کنید که $(x + k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$ ، بنابراین

$$x^2 + 6x + c = x^2 + 2kx + k^2 \Rightarrow \begin{cases} 6 = 2k \\ c = k^2 \end{cases}$$

در نتیجه $k = 3$ و $c = 9$ پس $k + c = 3 + 9 = 12$.

(۲۵)

الف) $\left(\frac{1}{\Delta}x - \frac{1}{2}y\right)^2 = \frac{1}{2\Delta}x^2 - \frac{1}{\Delta}xy + \frac{1}{4}y^2$

ب) $\left(4x - 10x^2y^3\right)^2 = 16x^2 - 80x^3y^3 + 100x^4y^6$

پ) $\left(-\frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$

ت) $(0.5x + 3y)^2 = 0.25x^2 + 3xy + 9y^2$

ث) $\left(\frac{\sqrt{26}}{\Delta^2}x - \sqrt{26}y\right)^2 = \frac{26}{\Delta^4}x^2 - \sqrt{26}xy + 26y^2$



۲۶

الف) $4x - 14xy = 2x(2) - 2x(7y) = 2x(2 - 7y)$

ب) $a^2b^2 + b^2 = b^2(a^2 + 1) = b^2(a^2 + b^2)$

پ) $a^2 - a^2 + 2a^2b = a^2(1) - a^2(a) + a^2(2b) = a^2(1 - a + 2b)$

۲۷

الف) $(x-y)(5x+a)$ ب) $(a+1)(a-b)$ پ) $2b(2a^2 - b^2)$

ت) $x^2y - z^2x + y^2x - yz^2 = x^2y + y^2x - z^2x - yz^2 = xy(x+y) - z^2(x+y) = (x+y)(xy - z^2)$

۲۸

الف) $(2x-y)^2$

ب) $(x^2 - 3y)^2$

پ) $9x^4 - 12x^2 + 4 = (3x)^2 - 2(3x)(2) + 2^2 = (3x^2 - 2)^2$

ت) $(x^4 + y^4)^2$

۲۹

الف) $(xy - 2zt)^2$

ب) $(x+y+1)^2$

پ) $16a^2 + 24a^3 + 9a^4 = a^2(16 + 24a + 9a^2) = a^2(4 + 3a)^2$

ت) $9a^2c - 6ab^2c + b^2c = c(9a^2) - c(6ab^2) + c(b^2) = c(9a^2 - 6ab^2 + b^2) = c((3a)^2 - 2(3a)(b^2) + (b^2)^2) = c(3a - b^2)^2$

ث) $x^5y - 4x^3y^2 + 4xy^3 = xy(x^4) - xy(4x^2y) + xy(4y^2) = xy(x^4 - 4x^2y + 4y^2) = xy((x^2)^2 - 2(x^2)(2y) + (2y)^2) = xy(x^2 - 2y)^2$

تمرین‌های ویژه

۱) چون در تک‌جمله‌ای‌های متشابه، قسمت‌های حرفی یکسان هستند، در نتیجه توان‌های x و y باید باهم برابر باشند. بنابراین

$n=2, m=1, k=1$

۲) چون درجه تک‌جمله‌ای برابر با مجموع درجه‌های متغیرهای آن است، نتیجه می‌شود $n=6$ و $m=5$. بنابراین

۳) بنا بر اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. بنابراین $(8)^2 = a^2 + (2)(3) + b^2$. پس $64 - 6 = a^2 + b^2$. در نتیجه $a^2 + b^2 = 58$

۴) ابتدا دو طرف تساوی $x - y = 5$ را به توان دو می‌رسانیم، نتیجه می‌شود $(x-y)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 25 \Rightarrow 125 - 2xy = 25 \Rightarrow 2xy = 125 - 25 = 100 \Rightarrow xy = 50$

۵) فرض کنید $A = a - b$. توجه کنید که $A^2 = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 17 - 2(-4) = 17 + 8 = 25$

چون $a > b$ ، پس $A = a - b = 5$

۶ اگر دو طرف تساوی $a + \frac{1}{a} = 3$ را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow a^2 + 2(a)\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a^2} = 9 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 9 - 2 = 7$$

۷ ابتدا توجه کنید که

$$16a^2 - 8a + 1 = (4a)^2 - 2(4a)(1) + 1^2 = (4a - 1)^2, \quad a^2 - 4a + 4 = a^2 - 2(a)(2) + 2^2 = (a - 2)^2$$

بنابراین، عبارت مورد نظر می‌شود

$$\sqrt{(4a-1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = |\underbrace{4a-1}_{-}| - |\underbrace{a-2}_{-}| = -(4a-1) - (-(a-2)) = -4a+1+a-2 = -3a-1$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ گزینه (۲): باید $m=3$ و $n=2$. بنابراین $mn=6$.

۲ گزینه (۴): چون درجه جمله‌های $-2x^3y^4z^2$ و x^4y^4 از ۱۰ کمتر است، پس باید درجه جمله $x^m y^n z$ برابر ۱۰ باشد. بنابراین $m+n+1=10$ ، پس $m+n=9$.

۳ گزینه (۲):

$$2(\Delta a - 2b)^2 + 4ab = 2(2\Delta a^2 - 2ab + 4b^2) + 4ab = 4\Delta a^2 - 4ab + 8b^2 + 4ab = 4\Delta a^2 + 8b^2 = 14.$$

۴ گزینه (۳):

$$a - b = 4 \Rightarrow (a - b)^2 = 16 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 16 \Rightarrow 10 - 2ab = 16 \Rightarrow ab = -3$$

۵ گزینه (۴):

$$a + b = \sqrt{2} - \sqrt{3} \Rightarrow (a + b)^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 2 - 2\sqrt{6} + 3 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6} \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$$

۶ گزینه (۲): فرض می‌کنیم $A = a^2 + b^2$. در این صورت

$$A^2 = (a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = 16 + 2(4) = 24$$

بنابراین (چون $A > 0$), $A = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

$$(a+b)^2 - 4ab = a^2 + b^2 + 2ab - 4ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 = (-8)^2 = 64$$

۷ گزینه (۴):

$$\frac{(x-y)^2}{xy} = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} - \frac{2xy}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = 4$$

۸ گزینه (۲):

$$S_{ABCD} = (x+y)^2, \quad S_{AEFH} = (x+y-2y)^2 = (x-y)^2$$

۹ گزینه (۳):

بنابراین

$$\text{مساحت ناحیه رنگی} = (x+y)^2 - (x-y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy - (x^2 + y^2 - 2xy) = 4xy$$

۱۰ گزینه (۲):

$$9 + 6\sqrt{2} = \sqrt{6}^2 + \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{6} \times \sqrt{3} = (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2$$

$$9 - 6\sqrt{2} = \sqrt{6}^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{6} \times \sqrt{3} = (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2$$

$$\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{9 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{6} - \sqrt{3} = 2\sqrt{6}$$



درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها



تمرین

درست یا نادرست



ت (X)

پ (✓)

ب (X)

الف (X)

کامل کنید



الف $(a+2b-c)^2 = a^2 + 4b^2 + c^2 + 2(2ab - ac - 2bc)$

ب ۵

پ $101^2 - 99^2 = (101+99)(101-99) = 200 \times 2 = 400$

ت $(2a-3b)(2a+3b) = 4a^2 - 9b^2$

پرسش‌های دو گزینه‌ای

ت گزینه (۱)

پ گزینه (۱)

ب گزینه (۲)

الف گزینه (۱)

تمرین‌های تشریحی

(۱)

الف $(a-b-c)^2 = (a)^2 + (-b)^2 + (-c)^2 + 2((a)(-b) + (-b)(-c) + (-c)(a)) = a^2 + b^2 + c^2 + 2(-ab + bc - ca)$

ب $(a-2b+c)^2 = (a)^2 + (-2b)^2 + (c)^2 + 2((a)(-2b) + (-2b)(c) + (c)(a)) = a^2 + 4b^2 + c^2 + 2(-2ab - 2bc + ca)$

پ $(x^2+x-1)^2 = (x^2)^2 + (x)^2 + (-1)^2 + 2((x^2)(x) + (x)(-1) + (-1)(x^2)) = x^4 + x^2 + 1 + 2(x^3 - x - x^2)$

ت $(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{5}{3})^2 = (\frac{1}{4}x^2)^2 + (\frac{1}{4}y^2)^2 + (-\frac{5}{3})^2 + 2((\frac{1}{4}x^2)(\frac{1}{4}y^2) + (\frac{1}{4}y^2)(-\frac{5}{3}) + (-\frac{5}{3})(\frac{1}{4}x^2))$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{16}y^4 + \frac{25}{9} + 2(\frac{1}{16}x^2y^2 - \frac{5}{12}y^2 - \frac{5}{12}x^2)$$

ث $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{1}{4})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\frac{1}{4})^2 + 2((\sqrt{2})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})(\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4})(\sqrt{2}))$

$$= 2 + 3 + \frac{1}{16} + 2(\sqrt{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}) = \frac{21}{4} + 2\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

ج $(\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{15})^2 = (\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{5})^2 + (\sqrt{15})^2 + 2((\sqrt{3})(-\sqrt{5}) + (-\sqrt{5})(\sqrt{15}) + (\sqrt{15})(\sqrt{3}))$

$$= 3 + 5 + 15 + 2(-\sqrt{15} - \sqrt{75} + \sqrt{45}) = 23 - 2\sqrt{15} - 2\sqrt{75} + 2\sqrt{45}$$

۲

الف) $(2x + y - 3)^2 = 4x^2 + y^2 + 9 + 2(2xy + (-3y) + (-3x))$

ب) $(xy - x + y)^2 = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2(-x^2y + xy^2 - xy)$

۳

$$(a^2 - 2a - 2)^2 - (a^2 - 4)(a^2 + 4) = (a^4 + 4a^2 + 4 + 2(-2a^2 + 4a - 2a^2)) - (a^4 - 16)$$

$$= a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 + 8a - 4a^2 - a^4 + 16 = -4a^2 + 8a + 20$$

۴

$$(a + b + c)^2 + b^2 - 2ac = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac + b^2 - 2ac = a^2 + 2b^2 + c^2 + 2ab + 2bc$$

$$= (a^2 + b^2 + 2ab) + (b^2 + c^2 + 2bc) = (a + b)^2 + (b + c)^2$$

۵

الف) $(x - 1)(x + 1) = (x)^2 - (1)^2 = x^2 - 1$

ب) $(2x - 3)(2x + 3) = (2x)^2 - (3)^2 = 4x^2 - 9$

پ) $\left(\frac{y}{2} + \frac{2}{y}\right)\left(\frac{y}{2} - \frac{2}{y}\right) = \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{y}\right)^2 = \frac{y^2}{4} - \frac{4}{y^2}$

ت) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = ((x)^2 - (2)^2)(x^2 + 4) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x^2)^2 - (4)^2 = x^4 - 16$

ث) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 2 - 3 = -1$

ج) $(a + 2b + c)(a + 2b - c) = ((a + 2b) + c)((a + 2b) - c) = (a + 2b)^2 - (c)^2 = (a)^2 + 2(a)(2b) + (2b)^2 - c^2$

$$= a^2 + 4ab + 4b^2 - c^2$$

ا) $(a - 2b - 3c)(a + 2b + 3c) = (a - (2b + 3c))(a + (2b + 3c)) = (a)^2 - (2b + 3c)^2$

$$= a^2 - ((2b)^2 + 2(2b)(3c) + (3c)^2) = a^2 - 4b^2 - 12bc - 9c^2$$

ا) $(x - y + 5)(x + y - 5) = (x + (-y + 5))(x - (-y + 5)) = (x)^2 - (-y + 5)^2 = x^2 - ((y^2 + 2(-y)(5) + (5)^2))$

$$= x^2 - (y^2 - 10y + 25) = x^2 - y^2 + 10y - 25$$

الف) $(2a + b)(2a - b) = 4a^2 - b^2$

ب) $(5a^2 - 3b)(5a^2 + 3b) = 25a^4 - 9b^2$

پ) $a^4 - 49b^4 = (a^2 - 7b^2)(a^2 + 7b^2)$

۶

الف) $(2\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 3) = (\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 3) = (\sqrt{2})^2 - (3)^2 = 2 - 9 = -7$

ب) $\sqrt[3]{\sqrt{2} - \sqrt{10}} \times \sqrt[3]{\sqrt{10} + \sqrt{2}} = \sqrt[3]{(\sqrt{2} - \sqrt{10})(\sqrt{2} + \sqrt{10})} = \sqrt[3]{2 - 10} = \sqrt[3]{-8} = -2$

پ) $\sqrt{5 - \sqrt{3}} \times \sqrt{5 + \sqrt{3}} \times \sqrt{22} = \sqrt{(5 - \sqrt{3})(5 + \sqrt{3})} \times \sqrt{22} = \sqrt{25 - 3} \times \sqrt{22} = \sqrt{22} \times \sqrt{22} = 22$

ت) $(\sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{2}) + (\sqrt{2} + \sqrt{2})^2$

$$= 2 - \sqrt{2} + 2(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2 + 2 + \sqrt{2} = 4 + 2(\sqrt{2} - 2) = 4 + 2\sqrt{2}$$

۷



$$\begin{aligned} \text{د) } (\sqrt{6-3\sqrt{3}} - \sqrt{6+3\sqrt{3}})^2 &= (\sqrt{6-3\sqrt{3}})^2 - 2\sqrt{6-3\sqrt{3}} \times \sqrt{6+3\sqrt{3}} + (\sqrt{6+3\sqrt{3}})^2 \\ &= |6-3\sqrt{3}| - 2\sqrt{6^2 - (3\sqrt{3})^2} + |6+3\sqrt{3}| = 6-3\sqrt{3} - 2\sqrt{36-27} + 6+3\sqrt{3} = 12-2\sqrt{9} = 12-6 = 6 \\ \text{ج) } \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{3000} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{3000} &= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{3000} = \left(\frac{(\sqrt{5})^2 - (1)^2}{4}\right)^{3000} = \left(\frac{5-1}{4}\right)^{3000} = 1^{3000} = 1 \end{aligned}$$

۸) ابتدا توجه کنید که

$$4a + 4b = 24 \Rightarrow a + b = 6$$

$$a^2 - b^2 = 3$$

در نتیجه

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \Rightarrow 3 = (a-b) \times 6 \Rightarrow a-b = \frac{1}{2}$$

۹) ابتدا توجه کنید که برای هر دو عدد متوالی n و $n+1$ داریم

$$(n+1)^2 - n^2 = (n+1-n)(n+1+n) = 2n+1$$

بنابراین مقدار عبارت موردنظر برابر است با

$$\begin{aligned} 20^2 - 19^2 + 18^2 - 17^2 + \dots + 2^2 - 1^2 &= (20^2 - 19^2) + (18^2 - 17^2) + \dots + (2^2 - 1^2) \\ &= 39 + 35 + 31 + 27 + 23 + 19 + 15 + 11 + 7 + 3 = 210 \end{aligned}$$

$$a(a+1)(a+2) = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3})(\sqrt{3}+1) = \sqrt{3}(\sqrt{3}^2 - 1^2) = 2\sqrt{3}$$

۱۰) مقدار عبارت موردنظر برابر است با

۱۱)

$$\text{الف) } (9+2x)(5+8x) \quad \text{ب) } (xy-1)(xy+1)(x^2y^2+1)$$

$$\text{پ) } (3x^2y^2-10z)(3x^2y^2+10z) \quad \text{ت) } 10x(x-2)(x+2)$$

$$\text{ث) } (x+y+z)(x+y-z+1) \quad \text{ج) } -(x-y)^2(x+y)^2$$

$$\text{د) } 3(x-2y-3z)(x-2y+3z) \quad \text{ه) } x^3(3x-5y^2)(3x+5y^2)$$

$$\text{ز) } (x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$$

۱۲)

$$\text{الف) } (3a-b)(3a+2b) = (3a)^2 + (-b+2b)(3a) + (-b)(2b) = 9a^2 + 3ab - 2b^2$$

$$\text{ب) } (a-4b)(2a-4b) = (-4b)^2 + (a+2a)(-4b) + (a)(2a) = 16b^2 - 12ab + 2a^2$$

$$\text{پ) } (a-3b)(a+2b) - a(a-b) = (a)^2 + (-3b+2b)a + (-3b)(2b) - a^2 + ab = a^2 - ab - 6b^2 - a^2 + ab = -6b^2$$

$$\text{ت) } (a-b)(a+3b) - (a^2-3b^2) = (a)^2 + (-b+3b)a + (-b)(3b) - a^2 + 3b^2 = a^2 + 2ab - 3b^2 - a^2 + 3b^2 = 2ab$$

۱۳)

$$\text{الف) } (x-4)(x+3) \quad \text{ب) } (x-5)(x+2)$$

$$\text{پ) } 4x^2 + 4x - 15 = (2x)^2 + (5-3)2x + (5)(-3) = (2x+5)(2x-3)$$

$$\text{ت) } (xy-5)(xy+4) \quad \text{ث) } -(x-7)(x+1) \quad \text{ج) } (x-2)(x+2)$$

۱۴

الف $\sqrt{11^2 + 154 + 7^2} = \sqrt{11^2 + (2 \times 11 \times 7) + 7^2} = \sqrt{(11+7)^2} = 18$

ب $\sqrt{5^6 + 2^4 + 10^3} = \sqrt{(5^3)^2 + (2^2)^2 + 2(5^3)(2^2)} = \sqrt{(5^3 + 2^2)^2} = 5^3 + 2^2 = 125 + 4 = 129$

پ $\frac{44^2 - 33^2}{55^2 - 22^2} = \frac{(44-33)(44+33)}{(55-22)(55+22)} = \frac{11 \times 77}{33 \times 77} = \frac{1}{3}$

ت $\sqrt{196 \times 198 + 1} = \sqrt{(197-1)(197+1) + 1} = \sqrt{(197^2 - 1) + 1} = \sqrt{197^2} = 197$

ث $\sqrt{1398 \times 1392 + 9} = \sqrt{(1395+3)(1395-3) + 9} = \sqrt{(1395^2 - 3^2) + 9} = \sqrt{1395^2 - 9 + 9} = \sqrt{1395^2} = 1395$

۱۵ الف توجه کنید که

$$\sqrt{\frac{25}{4} - \frac{15}{7} + \frac{9}{49}} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{7}\right) + \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{7}\right)^2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{7} = \frac{29}{14}$$

ب توجه کنید که

$$1399 \times 1401 + 1 = (1400-1)(1400+1) + 1 = 1400^2 - 1 + 1 = 1400^2$$

بنابراین a می‌تواند ۱۴۰۰ باشد.

پ بنابر اتحاد مزدوج،

$$7778^2 - 2223^2 = (7778 - 2223)(7778 + 2223) = 5555 \times 10001 = 55555555$$

ت فرض کنید $a = 85$. در این صورت، عدد موردنظر برابر است با

$$(a+2)(a+1) + (a+2)a - (a+1)a$$

$$a^2 + 3a + 2 + a^2 + 2a - a^2 - a = a^2 + 4a + 2 = (a^2 + 4a + 4) - 2 = (a+2)^2 - 2 = 87^2 - 2$$

تمرین‌های ویژه

۱ بنابر اتحاد مربع سه‌جمله‌ای،

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \Rightarrow 10^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(12) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 100 - 24 = 76$$

۲

$$(a+1)(a+2)(a+3)(a+4) = ((a+1)(a+4))((a+2)(a+3)) = (a^2 + 5a + 4)(a^2 + 5a + 6)$$

$$((a^2 + 5a) + 4)((a^2 + 5a) + 6) = (a^2 + 5a)^2 + 10(a^2 + 5a) + 24 = a^4 + 10a^3 + 25a^2 + 10a^2 + 50a + 24 =$$

$$a^4 + 10a^3 + 35a^2 + 50a + 24$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 14 + 2 \times 11 = 36$$

۳ با توجه به اتحاد مربع سه‌جمله‌ای،

بنابراین مقدار عبارت $|a+b+c|$ برابر است با ۶.

۴

بنابر اتحاد مربع سه‌جمله‌ای،

$$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(-ab-bc+ca) \Rightarrow 1 = 21 + 2(-ab-bc+ca) \Rightarrow -ab-bc+ca = \frac{-20}{2} = -10$$

$$\Rightarrow ab+bc-ca = 10$$



۵

الف) $(x-2y-3)(x-2y+3)$

ب) $9x^4 - 13x^2y^2 + 4y^4 = 9x^4 - 9x^2y^2 - 4x^2y^2 + 4y^4 = 9x^2(x^2 - y^2) - 4y^2(x^2 - y^2) = (x^2 - y^2)(9x^2 - 4y^2)$
 $= (x-y)(x+y)(3x-2y)(3x+2y)$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. گزینه (۱): اگر دو طرف تساوی $a-b-c=\sqrt{v}$ را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$(a-b-c)^2 = \sqrt{v}^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc = v \Rightarrow 5 - 2(ab + ac - bc) = v \Rightarrow ab + ac - bc = -1$$

۲. گزینه (۲): با استفاده از اتحاد مزدوج به دست می‌آید

$$\frac{25^2 - 21^2}{24^2 - 22^2} = \frac{(25-21)(25+21)}{(24-22)(24+22)} = \frac{4 \times 46}{2 \times 46} = 2$$

۳. گزینه (۲): از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$(\circ/\circ 11)^2 - (\circ/\circ \circ 1)^2 = (\circ/\circ 11 - \circ/\circ \circ 1)(\circ/\circ 11 + \circ/\circ \circ 1) = (\circ/\circ 1)(\circ/\circ 12)$$

بنابراین

$$(\circ/\circ 1)(\circ/\circ 12) = \circ/\circ \circ 1 k \Rightarrow k = \frac{(\circ/\circ 1)(\circ/\circ 12)}{\circ/\circ \circ 1} = \circ/\circ 12$$

۴. گزینه (۲): توجه کنید که

$$\sqrt[3]{11-\sqrt{57}} \times \sqrt[3]{11+\sqrt{57}} = \sqrt[3]{(11-\sqrt{57})(11+\sqrt{57})} = \sqrt[3]{11^2 - \sqrt{57}^2} = \sqrt[3]{121-57} = \sqrt[3]{64} = 4$$

۵. گزینه (۴): از اتحاد مزدوج به دست می‌آید

$$(x+y+z)^2 - (x-y-z)^2 = (x+y+z-x+y+z)(x+y+z+x-y-z) = (2y+2z)(2x) = 4x(y+z)$$

۶. گزینه (۱): ابتدا توجه کنید که

$$699^2 - 698^2 = (699+698)(699-698) = 1397$$

$$\frac{1397^2}{1397^2} = 1 \text{ با } 1 \text{ موردنظر برابر است}$$

۷. گزینه (۳):

$$\frac{1}{\sqrt{v}-1} - \frac{1}{\sqrt{v}+1} = \frac{(\sqrt{v}+1) - (\sqrt{v}-1)}{(\sqrt{v}-1)(\sqrt{v}+1)} = \frac{2}{\sqrt{v}^2 - 1^2} = \frac{2}{v-1} = \frac{1}{3}$$

۸. گزینه (۴):

$$(\sqrt{\sqrt{2}+1} + \sqrt{\sqrt{2}-1})^2 = (\sqrt{2}+1) + 2(\sqrt{\sqrt{2}+1})(\sqrt{\sqrt{2}-1}) + (\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2} + 2(\sqrt{\sqrt{2}^2 - 1}) = 2\sqrt{2} + 2$$

۹. گزینه (۳):

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{16} = 1 - 2^k$$

$$\text{بنابراین } 2^k = \frac{1}{16} = 2^{-4}, \text{ پس } k = -4$$

۱۰. گزینه (۲):

$$ab^2 + ba^2 = ab(b+a) = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}) = (2^2 - \sqrt{3}^2) \times 4 = (4-3) \times 4 = 4$$

درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله‌ها



تمرین

درست یا نادرست

✓ (ث)

✗ (ت)

✗ (پ)

✗ (ب)

✗ (الف)

کامل کنید

(ت) $b < c$

(پ) $a > b$

(ب) a کوچکتر از b است.

(الف) $a < b$ یا $a > b$

پرسش‌های دو گزینه‌ای

$$\begin{cases} a^2 c < 0 \Rightarrow c < 0 \\ bc^4 > 0 \Rightarrow b > 0 \end{cases} \Rightarrow bc < 0 \quad \begin{matrix} \text{(ب) گزینه (۱)} \\ \text{(ث) گزینه (۲)} \end{matrix}$$

(الف) گزینه (۱)

(پ) گزینه (۱)

تمرین‌های تشریحی

(۱)

(الف) $b - a = 2 \Rightarrow b > a$

(ب) $b - a = 6 \Rightarrow b > a$

(پ) $2(a - b) = 2 \Rightarrow a - b = 1 \Rightarrow a > b$

(ت) $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow a < b$

(ث) $a - b = (-\sqrt{2})^y = -(\sqrt{2}^y) < 0 \Rightarrow a < b$

(ج) $a - b = (-1/1)^1 = (1/1)^1 > 0 \Rightarrow a > b$

(۲)

(الف) $-3 < x \leq 5$

(ب) $-4 \leq x \leq 0$

(پ) $1 \leq x < 5$

(ت) $0 < x < 3$

(۳)

(الف) اگر $a^2 bc < 0$ ، معلوم است که عددهای a ، b و c مخالف صفر هستند. چون $a^2 > 0$ ، در نتیجه $bc < 0$. یعنی b و c هم‌علامت نیستند. به این ترتیب a هر عدد ناصفری می‌تواند باشد و عددهای b و c باید ناصفر و غیرهم‌علامت باشند.



ب) اگر $a^3 b^2 < 0$ ، معلوم است که عددهای a و b مخالف صفر هستند. چون $b^2 > 0$ ، در نتیجه $a^3 < 0$ ، یعنی a و c هم علامت نیستند. به این ترتیب b هر عدد ناصفری می تواند باشد و عددهای a و c باید ناصفر و غیرهم علامت باشند.

پ) اگر $\frac{a^3}{bc} < 0$ ، معلوم است که عددهای a و b مخالف صفر هستند. اکنون حالت های زیر را داریم:

حالت ۱: a منفی باشد و b و c مثبت باشند.

حالت ۲: b منفی باشد و a و c مثبت باشند.

حالت ۳: c منفی باشد و b و a مثبت باشند.

حالت ۴: a ، b و c منفی باشند.

ت) اگر $\frac{a^3}{b^2 c} < 0$ ، معلوم است که عددهای a و b مخالف صفر هستند. چون $b^2 > 0$ ، در نتیجه a و c غیرهم علامت هستند.

به این ترتیب b هر عدد ناصفری می تواند باشد و عددهای a و c باید ناصفر و غیرهم علامت باشند.

ث) اگر $\frac{a^3}{b^2 c^2} > 0$ ، معلوم است که عددهای a و b مخالف صفر هستند. بنابراین چون $b^2 > 0$ و $c^2 > 0$ ، به این ترتیب b

و c هر عدد ناصفری می توانند باشند و a باید عددی مثبت باشد.

(۴)

الف) $\forall a > 3a \Rightarrow \forall a - 3a > 0 \Rightarrow 4a > 0 \Rightarrow a > 0$

ب) $\Delta a < 9a \Rightarrow 0 < 9a - \Delta a \Rightarrow 0 < 4a \Rightarrow a > 0$

پ) $-3a + 4 > -a + 4 \Rightarrow -3a + a > 4 - 4 \Rightarrow -2a > 0 \Rightarrow a < 0$

ت) $-\Delta a + 1 < -4a + 1 \Rightarrow -\Delta a + 4a < 1 - 1 \Rightarrow -a < 0 \Rightarrow a > 0$

(۵) الف) توجه کنید که

$$a > b \xrightarrow{\times 13} 13a > 13b$$

سپس دو طرف نابرابری $a > 0$ را با عدد $13a$ جمع می کنیم که به دست می آید

$$a > 0 \Rightarrow a + 13a > 13a \Rightarrow 14a > 13a$$

بنابراین $14a > 13b$

ب) توجه کنید که

$$a > b \xrightarrow{\times (-1/2)} -1/2a < -1/2b$$

سپس برای مقایسه اعداد $-1/2b$ و $-1/1b$ از تفاضل آنها استفاده می کنیم،

$$(-1/1b) - (-1/2b) = -1/1b + 1/2b = 0/1b > 0$$

در نتیجه $-1/2b < -1/1b$ ، بنابراین $-1/2a < -1/1b$.

(۶)

الف) $a < 3/5 \xrightarrow{\times (-4)} -4a > -14$

ب) $a < 3/5 \xrightarrow{\times 2} 2a < 6 \xrightarrow{+(-6)} 2a - 6 < 6 - 6 \Rightarrow 2a - 6 < 0$

پ) $a < 3/5 \xrightarrow{\times (-1)} -a > -3/5 \xrightarrow{+7} 7 - a > 7 - 3/5 \Rightarrow 7 - a > 3/5$

(۷)

الف) $a < b \Rightarrow -2a > -2b$

ب) $a < b \Rightarrow 3a < 3b \Rightarrow 3a - \frac{1}{2} < 3b - \frac{1}{2}$

پ) $a < b \Rightarrow a - 1 < b - 1 \Rightarrow \frac{a-1}{\sqrt{2}} < \frac{b-1}{\sqrt{2}}$

ت) $a < b \Rightarrow a + 2 < b + 2 \Rightarrow \frac{a+2}{3} < \frac{b+2}{3} \Rightarrow -\frac{a+2}{3} > -\frac{b+2}{3}$

۸) چون $a^4 < b^4$ ، پس $a^4 - b^4 < 0$. اکنون با توجه به اتحاد مزدوج $(b^2 + a^2)(b^2 - a^2) < 0$. چون a^2 و b^2 اعدادی نامنفی هستند و $(b^2 + a^2)(b^2 - a^2) < 0$ پس $b^2 + a^2$ مثبت است. به این ترتیب $b^2 - a^2 < 0$ پس $a^2 < b^2$.

۹) ابتدا توجه کنید که $ac^2 < 0$ چون $c^2 > 0$ ، پس $a < 0$. سپس از نابرابری $b^3 a < 0$ (چون $a < 0$)، نتیجه می‌شود $b^3 > 0$ ، پس $b > 0$. در انتها از نابرابری $a^2 bc > 0$ و اینکه $a^2 > 0$ و $b > 0$ ، به دست می‌آید $c > 0$. بنابراین علامت عددهای a ، b و c به ترتیب منفی، مثبت و مثبت هستند.

$$2x \leq 3x - 1000$$

۱۰) الف) پول دانیال را x فرض کنید. بنابراین

$$x + y \geq \frac{x}{2} + 100$$

ب) پول فاطمه را x و پول زهرا را y فرض کنید، نتیجه می‌شود

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{3} \leq 5 \quad \text{پ}$$

۱۱) الف)

$$8(x - 4/5) \leq 4 - 2(x - 6) \Rightarrow 8x - 32/5 \leq 4 - 2x + 12 \Rightarrow 8x + 2x \leq 16 + 32/5 \Rightarrow 10x \leq 52 \Rightarrow x \leq \frac{52}{10} = \frac{26}{5}$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله موردنظر برابر است با

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 26/5\}$$

ب)

$$\frac{3}{2}(x+2) + \frac{5}{3}(x-3) \leq 17 \Rightarrow \frac{3}{2}x + 3 + \frac{5}{3}x - 5 \leq 17 \Rightarrow \frac{3}{2}x + \frac{5}{3}x \leq 17 - 3 + 5 \Rightarrow \frac{19}{6}x \leq 19 \Rightarrow x \leq 19 \times \frac{6}{19} \Rightarrow x \leq 6$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6\}$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله موردنظر برابر است با

پ)

$$\frac{3x}{5} - \frac{x}{4} < 14 \Rightarrow \frac{12x - 5x}{20} < 14 \Rightarrow \frac{7x}{20} < 14 \Rightarrow x < 14 \times \frac{20}{7} = 40$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 40\}$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله موردنظر برابر است با

ت)

$$\frac{2x-1}{2} - \frac{4x-4}{5} > 0 \Rightarrow x - \frac{1}{2} - \frac{4}{5}x + \frac{4}{5} > 0 \Rightarrow x - \frac{4}{5}x > \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{1}{5}x > \frac{-3}{10} \Rightarrow x > \left(-\frac{3}{10}\right) \times 5 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{3}{2}\}$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله موردنظر برابر است با

ث)

$$\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} \geq \frac{x+12}{6} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} - \frac{x}{6} \geq \frac{12}{6} \Rightarrow x \geq 2$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله موردنظر برابر است با

ج)

$$\frac{x}{2} - \frac{2x+1}{3} < \frac{x+3}{6} \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} < \frac{x}{6} + \frac{3}{6} \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{2x}{3} - \frac{x}{6} < \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{x}{6} < \frac{5}{6} \Rightarrow x > \frac{5}{6} \times (-3) \Rightarrow x > -\frac{5}{2}$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله موردنظر برابر است با $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{2}\right\}$.

$$\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} < 1 - \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{3x}{5} - \frac{1}{5} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} < 1 - \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{3x}{5} - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} < 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{5} < \frac{17}{10} \Rightarrow x < \frac{17}{10} \times \frac{5}{3} \Rightarrow x < \frac{17}{6}$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله موردنظر برابر است با $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{17}{6}\right\}$.

د)

$$3x + \frac{3-2x}{2} < x - \frac{1-5x}{5} \Rightarrow 3x + \frac{3}{2} - x < x - \frac{1}{5} + x \Rightarrow 2x + \frac{3}{2} < 2x - \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{3}{2} < -\frac{1}{5}$$

چون این نابرابری درست نیست، پس مجموعه جواب‌های نامعادله موردنظر تهی است.



ب) ابتدا توجه کنید که $\sqrt{3} < 2$ ، پس $\sqrt{3} - 2 < 0$. بنابراین داریم

$$\frac{x-2}{\sqrt{3}-2} \geq \sqrt{3}+2 \Rightarrow x-2 \leq (\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2) \Rightarrow x-2 \leq \sqrt{3}^2-2^2 \Rightarrow x-2 \leq -1+2 \Rightarrow x \leq 1$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله موردنظر برابر است با $\{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$.

د

$$(x+5)(x-6) \leq x^2 \Rightarrow x^2 - x - 30 \leq x^2 \Rightarrow -x - 30 \leq 0 \Rightarrow x \geq -30$$

پس مجموعه جواب‌های نامعادله موردنظر برابر $\{x \in \mathbb{R} | x \geq -30\}$ است.

$$x(x-3) < (x-2)(x-1) \Rightarrow x^2 - 3x \leq x^2 - 3x + 2 \Rightarrow 0 \leq 2$$

ف

چون این نابرابری همواره درست است، پس مجموعه جواب‌های نامعادله موردنظر برابر $\mathbb{R}$ است.

$$a - \frac{a}{2} \geq 11 \Rightarrow \frac{a}{2} \geq 11 \Rightarrow a \geq 22$$

(۱۲) تعداد دانش‌آموزان کلاس را a فرض کنید. بنابراین

پس این کلاس دست کم ۲۲ دانش‌آموز دارد.

(۱۳) فرض کنید در برنامه (الف)، x کیلومتر طی کنیم. در این صورت برنامه (ب) وقتی به صرفه است که

$$500000 < 200000 + 500x \Rightarrow 300000 < 500x \Rightarrow x > \frac{300000}{500} = 600$$

بنابراین، اگر بخواهیم بیشتر از ۶۰۰ کیلومتر در یک روز طی کنیم، برنامه (ب) به صرفه‌تر است.

(۱۴) این دو نفر در هر روز روی هم رفته به حداقل $3(95+75) = 510$ کیلوکالری انرژی نیاز دارند. فرض کنید آن‌ها می‌توانند x

روز در جنگل دوام بیاورند. بنابراین $510 \leq x \leq 510$ ، پس $x = 510$. یعنی این دو نفر حداکثر ده روز می‌توانند در جنگل دوام بیاورند.

تمرین‌های ویژه

۱ الف) راه‌حل اول توجه کنید که اگر $a > 3$ ، پس a عددی مثبت است، در نتیجه

$$a > 3 \xrightarrow{\times a} a \times a > 3 \times a \Rightarrow a^2 > 3a$$

راه‌حل دوم توجه کنید که اگر $a > 3$ ، پس a عددی مثبت است و $a - 3 > 0$ ، از طرف دیگر

$$a^2 - 3a = a(a-3) > 0 \Rightarrow a^2 > 3a$$

ب) توجه کنید که اگر $a < -5$ ، پس a عددی منفی است و $a + 5 < 0$. از طرف دیگر

$$a^2 + 5a = a(a+5) > 0 \Rightarrow a^2 > -5a$$

۲

$$\text{الف) } \left. \begin{array}{l} a < b \Rightarrow 3a < 3b \\ 3b < 3b+1 \end{array} \right\} \Rightarrow 3a < 3b+1$$

$$\text{ب) } \left. \begin{array}{l} a < b \Rightarrow -a > -b \Rightarrow -a+5 > -b+5 \\ -a+6 > -a+5 \end{array} \right\} \Rightarrow -a+6 > -b+5$$

$$\text{پ) } \left. \begin{array}{l} a < b \Rightarrow 3a < 3b \\ 3a-2 < 3a \end{array} \right\} \Rightarrow 3a-2 < 3b$$

$$\text{ت) } \left. \begin{array}{l} a < b \Rightarrow 5a < 5b \\ 5a-3 < 5a \\ 5b < 5b+2 \end{array} \right\} \Rightarrow 5a-3 < 5a < 5b < 5b+2 \Rightarrow 5a-3 < 5b+2$$

۳

$$\frac{3x+1}{4} + \frac{x-1}{3} < 11 \Rightarrow \frac{3x}{4} + \frac{1}{4} + \frac{x}{3} - \frac{1}{3} < 11 \Rightarrow \frac{3x}{4} + \frac{x}{3} < 11 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{13x}{12} < \frac{133}{12} \Rightarrow x < \frac{133}{12} \times \frac{12}{13} \Rightarrow x < \frac{133}{13} \approx 10\frac{1}{2}$$

پس بزرگ‌ترین عدد صحیح که در این نامعادله صدق می‌کند برابر ۱۰ است.

۴

$$5x+1 \geq 11 \Rightarrow 5x \geq 11-1 \Rightarrow 5x \geq 10 \Rightarrow x \geq \frac{10}{5} = 2$$

ابتدا توجه کنید که

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

بنابراین

$$2x-3 < 7 \Rightarrow 2x < 7+3 \Rightarrow 2x < 10 \Rightarrow x < \frac{10}{2} = 5$$

از طرف دیگر،

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$$

بنابراین

در نتیجه

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. گزینه (۳): چون $c < 0$ ، پس $a > a+c > b$. در نتیجه

۲. گزینه (۲): از نابرابری $ac < 0$ نتیجه می‌شود که عددهای a و c غیرصفرند. پس از تساوی $ab = 0$ به دست می‌آید $b = 0$. در نتیجه از نابرابری $b+c > 0$ به دست می‌آید $c > 0$. در نهایت از نابرابری $ac < 0$ (چون $c > 0$) نتیجه می‌شود $a < 0$. بنابراین گزینه (۲) درست است و گزینه‌های دیگر نادرست‌اند.

۳. گزینه (۱): چون $b^2 > 0$ ، پس از نابرابری $ab^2 < 0$ نتیجه می‌شود $a < 0$. اکنون از نابرابری $ac > 0$ به دست می‌آید $c < 0$. در نهایت از نابرابری $bc > 0$ نتیجه می‌شود $b < 0$. بنابراین هر سه عدد a ، b و c منفی هستند.

۴. گزینه (۱): از نابرابری $x^3 y^2 > 0$ نتیجه می‌شود اعداد x و y مخالف صفر هستند و چون $y^2 > 0$ ، پس $x^3 > 0$ یعنی $x > 0$. از تساوی $\frac{x}{y} = 2$ نتیجه می‌شود $x = 2y$ و چون $x > 0$ ، پس $y > 0$. بنابراین گزینه (۱) حتماً درست است. گزینه‌های دیگر درست نیستند.

۵. گزینه (۴): ابتدا توجه کنید که از نابرابری‌های داده شده نتیجه می‌شود عددهای x ، y و z صفر نیستند. چون $z^2 > 0$ ، از نابرابری $yz^2 < 0$ به دست می‌آید $y < 0$. اکنون از نابرابری $x^2 y^3 z > 0$ ، چون $y < 0$ و $x^2 > 0$ ، نتیجه می‌شود $z < 0$. در نهایت از نابرابری $x^3 y^2 z > 0$ ، چون $y^2 > 0$ و $z < 0$ ، نتیجه می‌شود $x^3 < 0$ ، یعنی $x < 0$. بنابراین علامت هر سه عدد x ، y و z منفی است.

۶. گزینه (۱): ابتدا توجه کنید که

$$-2 < x \Rightarrow -2 \times 2 < 2x \Rightarrow -4 < 2x+1 \Rightarrow -3 < 2x+1 \Rightarrow x < 5 \Rightarrow 2x < 5 \times 2 \Rightarrow 2x+1 < 10+1 \Rightarrow 2x+1 < 11$$

بنابراین مقدار عبارت $2x+1$ برابر با -3 نمی‌تواند باشد.

۷. گزینه (۱):

$$2(n-2) - 3(n-1) > -8 \Rightarrow 2n-4-3n+3 > -8 \Rightarrow 2n-3n > -8+4-3 \Rightarrow -n > -7 \Rightarrow n < 7$$

بنابراین شش عدد طبیعی ۱، ۲، ... و ۶ در نامعادله موردنظر صدق می‌کنند.

۸. گزینه (۱): ابتدا توجه کنید که

$$2(1+x) \leq 3x+1 \Rightarrow 2+2x \leq 3x+1 \Rightarrow 2-1 \leq 3x-2x \Rightarrow 1 \leq x$$

بنابراین نمودار مجموعه جواب‌های نامعادله موردنظر، گزینه (۱) است.



۹. گزینه (۲): مجموعه جوابهای نامعادلههای داده شده را به دست می آوریم:

$$\frac{x}{2} < -2 \Rightarrow x < -4$$

گزینه (۱)

$$-2x \geq 4 \Rightarrow x \leq \frac{4}{-2} = -2$$

گزینه (۲)

$$3x - 6 \leq 0 \Rightarrow 3x \leq 6 \Rightarrow x \leq \frac{6}{3} = 2$$

گزینه (۳)

$$\frac{x}{3} + 2 < 0 \Rightarrow \frac{x}{3} < -2 \Rightarrow x < -6$$

گزینه (۴)

بنابراین نمودار داده شده، مجموعه جوابهای نامعادله گزینه (۲) است.

۱۰. گزینه (۱): ابتدا مجموعه جوابهای نامعادله $x - 5 < 0$ را به دست می آوریم: $x - 5 < 0 \Rightarrow x < 5 \Rightarrow A = \{x \in \mathbb{R} | x < 5\}$

اکنون مجموعه جوابهای نامعادله $2x + 2 \geq 0$ را به دست می آوریم:

$$2x + 2 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -2 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow B = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -1\}$$

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x < 5\}$$

بنابراین اشتراک مجموعه جوابهای این دو نامعادله بدین شکل است:

امتحان نهایی فصل اول

۱

الف) نادرست	ب) نادرست	پ) درست	ت) درست	ث) درست
ج) نادرست	ج) نادرست	ج) درست	ج) درست	د) نادرست
ذ) نادرست	ز) نادرست	ز) نادرست	ز) نادرست	س) نادرست

۲

الف) ۵	ب) درجه نسبت به X ، ۱۰ و درجه نسبت به Y ، ۴ است.
پ) ۳	ت) ۶
ج) کوچکتر	خ) ۵
	ث) ۳
	ج) ۱۲
	ج) a^2b^2

۳

الف) گزینه (۲)
ب) گزینه (۱)

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow 10^2 = x^2 + y^2 + 2 \times 28 \Rightarrow x^2 + y^2 = 100 - 56 = 44$$

پ) گزینه (۱)	ت) گزینه (۲)	ث) گزینه (۳)	ج) گزینه (۳)	ج) گزینه (۱)
ج) گزینه (۴)	خ) گزینه (۲)	د) گزینه (۳)	ذ) گزینه (۴)	ز) گزینه (۴)
ز) گزینه (۴)				

۴

الف) $(2a-5)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(5) + (5)^2 = 4a^2 - 20a + 25$

ب) $(x-7)(x+7) = x^2 - 49$

پ) $(2x-3)(2x+8) = (2x)^2 + (-3+8)2x + (-3)(8) = 4x^2 + 10x - 24$

ت) $(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

ث) $(x^2-4)^2 = (x^2)^2 - 2(4)(x^2) + (4)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$

ج) $(5x-2y)(5x+2y) = (5x)^2 - (2y)^2 = 25x^2 - 4y^2$

ج) $(xy-z)(xy+z) = (xy)^2 - z^2 = x^2y^2 - z^2$

ج) $(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3}) = (a)^2 - (\sqrt{3})^2 = a^2 - 3$

خ) $(2a-3)(2a+3) = (2a)^2 - (3)^2 = 4a^2 - 9$

د) $(2a+\frac{1}{2})^2 = (2a)^2 + 2(2a)(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2 = 4a^2 + 2a + \frac{1}{4}$



الف) $a^2 - 81 = (a+9)(a-9)$

ب) $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2)$

پ) $m^3 - 1 = (m^2 + 1)(m - 1) = (m^2 + 1)(m+1)(m-1)$

ت) $x^2 + 3x - 10 = x^2 + (5-2)x + (-2)(5) = (x+5)(x-2)$

ث) $tx^2 - 7tx + 10t = t(x^2 - 7x + 10) = t(x + (-5-2)x + (-5)(-2)) = t(x-5)(x-2)$

ج) $25x^2 + 60xy + 36y^2 = (5x)^2 + 2(5x)(6y) + (6y)^2 = (5x+6y)^2$

چ) $x^2 - 9y^2 = (x+3y)(x-3y)$

ح) $y^2 + 7y + 12 = y^2 + (4+3)y + (4)(3) = (y+4)(y+3)$

خ) $36x^2 - 12xy + y^2 = (6x)^2 - 2(6x)(y) + y^2 = (6x-y)^2$

د) $8ab - 6a = 2a(4b-3)$

ذ) $9x^2 - y^2 = (3x^2 + y)(3x - y)$

ر) $64 - x^2y^2 = (8+xy)(8-xy)$

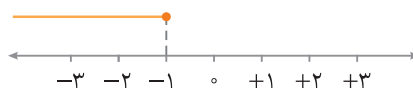
ز) $4a^2 - 9 = (2a+3)(2a-3)$



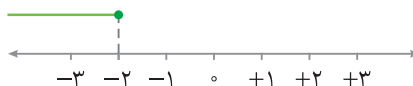
الف) $3(2x+1) \geq x-7 \Rightarrow 6x+3 \geq x-7 \Rightarrow 6x-x \geq -7-3 \Rightarrow 5x \geq -10 \Rightarrow x \geq -2$



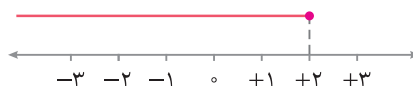
ب) $1-2x \geq 3(4+3x) \Rightarrow 1-2x \geq 12+9x \Rightarrow 1-12 \geq 9x+2x \Rightarrow -11 \geq 11x \Rightarrow x \leq -1$



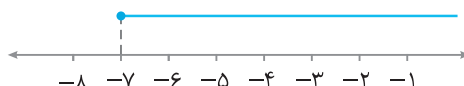
پ) $2(x+5) \leq 6x+18 \Rightarrow 2x+10 \leq 6x+18 \Rightarrow 10-18 \leq 6x-2x \Rightarrow 4x \leq -8 \Rightarrow x \leq -2$



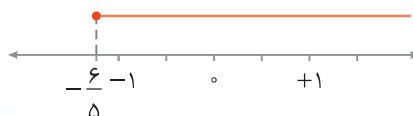
ت) $5(3x-4) \leq 2(x+3) \Rightarrow 15x-20 \leq 2x+6 \Rightarrow 15x-2x \leq 6+20 \Rightarrow 13x \leq 26 \Rightarrow x \leq 2$



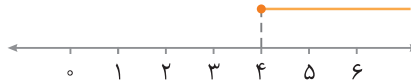
ث) $2(x-3)-1 \leq 3x \Rightarrow 2x-7 \leq 3x \Rightarrow -7 \leq 3x-2x \Rightarrow x \geq -7$



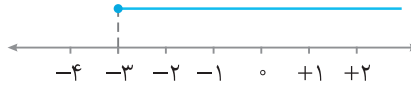
ج) $6x+7 \geq 1+x \Rightarrow 6x-x \geq 1-7 \Rightarrow 5x \geq -6 \Rightarrow x \geq -\frac{6}{5}$



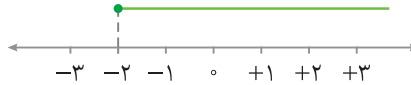
ج) $4x - 21 + 2x \geq 3 \Rightarrow 6x \geq 3 + 21 \Rightarrow 6x \geq 24 \Rightarrow x \geq 4$



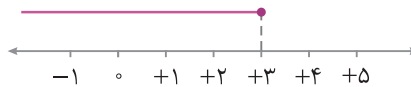
ج) $2x + 1 \geq -5 \Rightarrow 2x \geq -5 - 1 \Rightarrow 2x \geq -6 \Rightarrow x \geq -3$



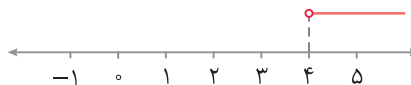
ج) $3x \leq 8 + 7x \Rightarrow -8 \leq 7x - 3x \Rightarrow 4x \geq -8 \Rightarrow x \geq -2$



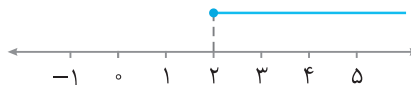
د) $5(x-1) \leq 3x+1 \Rightarrow 5x-5 \leq 3x+1 \Rightarrow 5x-3x \leq 1+5 \Rightarrow 2x \leq 6 \Rightarrow x \leq 3$



د) $\frac{y-1}{8} > \frac{y-4}{16} \xrightarrow{\times 16} 2y-8 > y-4 \Rightarrow 2y-y > -4+8 \Rightarrow y > 4$



د) $2(x-2) \geq 0 \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$



۷

الف) $(2x-5)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(5) + (5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$

ب) $4x-5+x^2 = x^2+4x-5$

۸

الف) $(3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

ب) $x(x+5) = x^2 + 5x$

اگر $(2x+3)^2 = 4x^2 + 9$ ، داریم $4x^2 + 12x + 9 = 4x^2 + 9$. بنابراین $12x = 0$ و این عبارت فقط به ازای $x = 0$ صحیح

است. پس $(2x+3)^2 = 4x^2 + 9$ یک معادله است.

۹

$(a-b)^2 + 2ab = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = a^2 + b^2$

۱۰

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$

۱۱



$$102 \times 98 = (100 + 2)(100 - 2) = 100^2 - 2^2 = 9996$$



الف) $598 \times 602 = (600 - 2)(600 + 2) = 360000 - 4 = 359996$

ب) $\frac{a-b}{2} = -3 \Rightarrow a-b = -6 \Rightarrow b = a+6 \Rightarrow a < b$

الف) اگر $ab > 0$ ، آنگاه a و b باید هر دو هم‌علامت باشند.



ب) $\frac{1}{2}a + 4b = 6$



الف) $a = -2, b = 1$

ب) $(x-4)^2 = x^2 - (-8x) + 16$

الف) اگر $a = -5$ و $b = 1$ ، آنگاه $a+b < 0$ در حالی که a عددی منفی است و b مثبت.



الف) اگر $ab < 0$ ، آنگاه a و b باید غیرهم‌علامت باشند. یعنی a عددی مثبت باشد و b عدد منفی یا a عددی منفی باشد و b مثبت.



b مثبت.

ب) $6x - 10 \leq 4x + 2 \Rightarrow 6x - 4x \leq 2 + 10 \Rightarrow 2x \leq 12 \Rightarrow x \leq 6$



الف) $7a^2 - 14a = 7a(a-2)$

ب) $x^2 - 13x + 36 = x^2 + (-9-4)x + (-9)(-4) = (x-9)(x-4)$

ب) $3 - 5x \geq 2(7 - 4x) \Rightarrow 3 - 5x \geq 14 - 8x \Rightarrow 8x - 5x \geq 14 - 3 \Rightarrow 3x \geq 11 \Rightarrow x \geq \frac{11}{3}$



الف) $1) x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$

$2) (\frac{1}{4}x^2 - 25) = (\frac{1}{4}x + 5)(\frac{1}{4}x - 5)$

ب) $-4x + 7 \geq -3x + 13 \Rightarrow -13 + 7 \geq 4x - 3x \Rightarrow -6 \geq x$ $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -6\}$

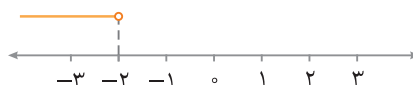


الف) $1) (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

$2) (a+7)(a-5) = a^2 + 2a - 35$

ب) $105 \times 95 = (100 + 5)(100 - 5) = 100^2 - 5^2 = 9975$

ب) $3(3x+2) < 5x-2 \Rightarrow 9x+6 < 5x-2 \Rightarrow 9x-5x < -2-6 \Rightarrow 4x < -8 \Rightarrow x < -2$



فصل ششم

خط و معادله‌های خطی



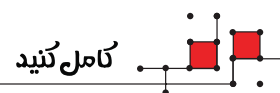


درس اول: معادله خط



درست یا نادرست  

الف) نادرست (ب) نادرست (پ) درست
ت) درست (ث) درست



الف) $y = ax + b$ (ب) $y = ax$ (پ) $5 = 2(2) + k \Rightarrow k = \frac{5}{4}$

ت) بی شمار - اتحاد

پرسش های دو گزینه ای

الف) گزینه (۲) (ب) گزینه (۱) (پ) گزینه (۲)
ت) گزینه (۲) (ث) گزینه (۲)

تمرین های تشریحی

۱) توجه کنید که عددهای $x = 2$ و $y = -1$ ، جواب معادله $y = 3 - 2x$ هستند و عددهای $x = -1$ و $y = 1$ جواب معادله

$y = 3 - 2x$ نیستند. بنابراین نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی خط $y = 3 - 2x$ قرار دارد ولی نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ روی این خط نیست.

۲

$$x = 2 \Rightarrow y = -3 \times 2 + 2 = -6 + 2 = -4$$

$$\text{نقطه مورد نظر} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

۳

$$y = 2 \Rightarrow 2 = -\frac{x}{2} + 4 \Rightarrow \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{نقطه مورد نظر} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۴) برای اینکه نقطه‌ای روی خطی قرار داشته باشد، باید مختصات آن در معادله خط صدق کنند یعنی جواب آن معادله باشند.
در نتیجه $a = 1 - 3(-2) = 1 + 6 \Rightarrow a = 7$

۵)

$$a - 1 = 3(a) + 1 \Rightarrow 3a - a = -1 - 1 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

۶)

الف) $4 = 3 + c \Rightarrow c = 4 - 3 = 1$

ب) $-3 = 2(-2) + c \Rightarrow -3 = -4 + c \Rightarrow c = 4 - 3 = 1$

۷)

$$4 = k(-3) + 6 \Rightarrow 4 = -3k + 6 \Rightarrow 3k = 6 - 4 \Rightarrow 3k = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

۸) الف) بله. زیرا محیط دایره به شعاع R برابر است با $2\pi R$

ب) خیر. زیرا مساحت دایره شعاع R برابر است با πR^2

۹) الف) $y = -2x$ ب) $y = x - 3$ پ) $y = 2x + 1$ ت) $y = -2x + 9$

۱۰) معادله خط موردنظر به صورت $y = ax$ است. چون نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ روی این خط است، پس $4 = a(1)$ ، یعنی $a = 4$. بنابراین

معادله خط موردنظر به صورت $y = 4x$ است.

۱۱) معادله خط موردنظر به صورت $y = ax$ است. چون نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ روی این خط است، پس $4 = a(-2)$ ، یعنی $a = -2$.

بنابراین معادله خط موردنظر به صورت $y = -2x$ است. چون نقطه $\begin{bmatrix} 6 \\ k \end{bmatrix}$ روی این خط است، پس $k = -2(6) = -12$.

۱۲)

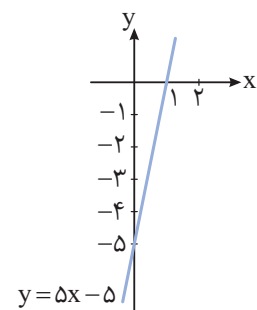
نقطه برخورد با محور طول‌ها: $y = 0 \Rightarrow 0 = 2x - 8 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$

نقطه برخورد با محور عرض‌ها: $x = 0 \Rightarrow y = 2(0) - 8 \Rightarrow y = -8$

نقطه برخورد با محور عرض‌ها: $x = 0 \Rightarrow y = 2(0) - 8 \Rightarrow y = -8$

نقطه برخورد با محور عرض‌ها: $x = 0 \Rightarrow y = 2(0) - 8 \Rightarrow y = -8$

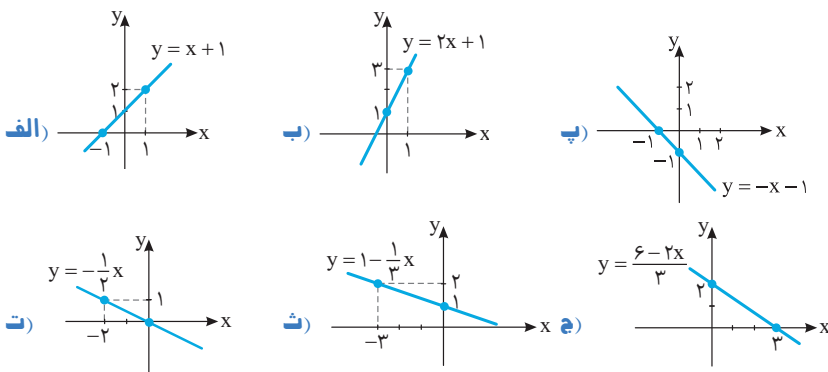
۱۳)



$$y = 5x - 5$$

$$S = \frac{5 \times 1}{2} = \frac{5}{2}$$

x	0	1
y	-5	0



پرسش های چهارگزینه ای

۱ گزینه (۳)

فقط مختصات نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ جواب معادله $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ هستند.

۲ گزینه (۴)

مختصات نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ جواب معادله $y = -x + 7$ نیستند.

۳ گزینه (۱)

اگر نقطه موردنظر $\begin{bmatrix} x \\ 3 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه $3 = -2x + 5$ ، پس $x = 1$.

۴ گزینه (۳)

$$k - 2 = 3(k) + 4 \Rightarrow 2k = -6 \Rightarrow k = -3$$

۵ گزینه (۲)

چون مختصات نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ جواب معادله $y = 2x - k + 1$ هستند، پس $0 = -k + 1$ ، یعنی $k = 1$.

۶ گزینه (۱)

معادله خط موردنظر به صورت $y = ax$ است. چون نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ روی این خط است، پس $-2 = a(-1)$ ، یعنی $a = 2$.

بنابراین، معادله خط موردنظر به صورت $y = 2x$ است.

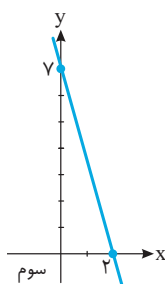
۷ گزینه (۴)

معادله خط موردنظر به صورت $y = ax$ است. چون نقطه $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ روی این خط است، پس $4 = a(-3)$ ، یعنی $a = -\frac{4}{3}$.

بنابراین معادله خط موردنظر به صورت $y = -\frac{4}{3}x$ است. از نقطه های داده شده فقط نقطه $\begin{bmatrix} 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ روی این خط است.

۸ گزینه (۴)

توجه کنید که مختصات نقطه های داده شده جواب معادله $y = x - 3$ هستند.



گزینه (۳)

برای رسم نمودار خط به معادله $y = -3/5x + 7$ ، دو نقطه از آن را به دست می آوریم:

$$x=0 \Rightarrow y=0+7 \Rightarrow y=7 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$x=2 \Rightarrow y=-3/5 \times 2 + 7 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین خط موردنظر از ناحیه سوم نمی گذرد.

گزینه (۴)

نقاط برخورد این خط با محورهای مختصات را A و B می نامیم. به شکل رسم شده توجه کنید. چون $y_A = 0$ ، پس

$2x_A + 0 - 1 = 0$ ، در نتیجه $x_A = \frac{1}{2}$. از طرف دیگر چون $x_B = 0$ ، پس $2 \times 0 + y_B - 1 = 0$ ، در نتیجه $y_B = 1$. بنابراین

$$x_A + y_B = \frac{3}{2}$$

درس دوم: شیب خط و عرض از مبدأ



درست یا نادرست

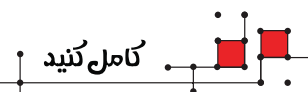
(پ) نادرست

(ب) درست

(الف) نادرست

(ث) نادرست

(ت) نادرست



(ب) $\frac{4}{2} = 2 =$ عرض از مبدأ

(الف) $\frac{0 - (-2)}{2 - 0} = \frac{2}{2} = 1 =$ شیب

(ث) طولها

(ت) عرضها

(پ) $4x - 2y = 6$

پرسش های دو گزینه ای

$$\text{شیب} = \frac{2-4}{1-(-1)} = \frac{-2}{2} = -1$$

(الف) گزینه (۱)

(ث) گزینه (۱)

(ت) گزینه (۲)

(پ) گزینه (۱)

(ب) گزینه (۲)



تمرین های تشریحی

۱

(a) $\frac{2}{3}$

(e) $\frac{1}{6}$

(b) -1

(f) تعریف نشده

(c) $\frac{1}{3}$

(g) -3

(d) $\frac{-4}{3}$

(h) $-\frac{1}{8}$

(i) صفر

۲

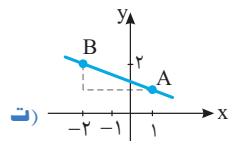
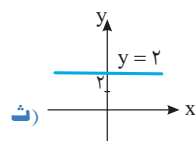
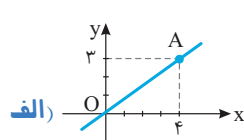
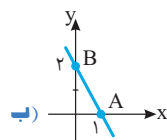
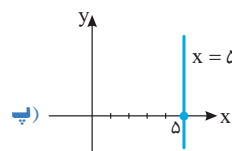
PQ (شیب = $\frac{1}{5}$) (ت)

VW (شیب = 0) (پ)

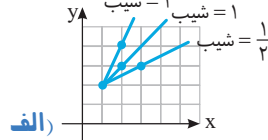
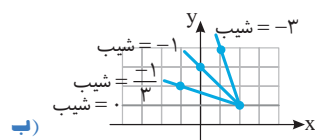
ST (شیب = $-\frac{3}{2}$) (ب)

TU (شیب = 2) (الف)

۳



۴



۵ شیب خط گذرا از دو نقطه $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ به صورت $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ است، بنابراین نتیجه می شود:

(ب) شیب = $\frac{5-0}{-2-0} = -\frac{5}{2}$

(الف) شیب = $\frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$

(ت) شیب = $\frac{3-3}{2-1} = 0$

(پ) شیب = $\frac{-2-1}{-2-1} = \frac{-3}{-3} = 1$

۶ شیب خط حاصل از دو نقطه $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ به صورت $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ است، بنابراین نتیجه می شود:

(ب) شیب خط موازی با محور X برابر صفر است: شیب = 0.

(الف) شیب = $\frac{0-(-2)}{0-1} = -2$

(ت) شیب = $\frac{3-(-2)}{-2-3} = \frac{3+2}{-5} = -1$

(پ) شیب = $\frac{2-1}{1-3} = -\frac{1}{2}$

۷ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \text{شیب خط} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - (1 - 2k)}{5 - (-4)} = \frac{6 - 1 + 2k}{5 + 4} = \frac{5 + 2k}{9} \\ 5 + 2k &= 9 \times 3 \Rightarrow 5 + 2k = 27 \Rightarrow 2k = 27 - 5 = 22 \Rightarrow k = 11 \end{aligned}$$

۸) توجه کنید که

$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(k+2) - 7}{3k - (-1)} = \frac{k-5}{3k+1} = \frac{-1}{2} \Rightarrow 2(k-5) = -(3k+1)$$

$$2k - 10 = -3k - 1 \Rightarrow 2k + 3k = -1 + 10 \Rightarrow 5k = 9 \Rightarrow k = \frac{9}{5}$$

۹) توجه کنید که

$$\text{شیب خط} = \frac{(k+1) - 3k}{5k - (2-k)} = \frac{k+1-3k}{5k-2+k} = \frac{1-2k}{6k-2} = \frac{2}{5}$$

$$5(1-2k) = 2(6k-2) \Rightarrow 5-10k = 12k-4 \Rightarrow 5+4 = 12k+10k$$

$$9 = 22k \Rightarrow k = \frac{9}{22}$$

۱۰)

الف) $y = 3x - 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب} = 3 \\ \text{عرض از مبدأ} = -2 \end{cases}$ ب) $y = 7 - x \Rightarrow y = -x + 7 \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب} = -1 \\ \text{عرض از مبدأ} = 7 \end{cases}$

پ) $y = 2 - \frac{3}{2}x \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب} = -\frac{3}{2} \\ \text{عرض از مبدأ} = 2 \end{cases}$ ت) $y = \frac{x+1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب} = \frac{1}{2} \\ \text{عرض از مبدأ} = \frac{1}{2} \end{cases}$

۱۱)

الف) $2y - 4x = 5 \Rightarrow 2y = 4x + 5 \Rightarrow y = \frac{4}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow y = 2x + \frac{5}{2}$

شیب = ۲، عرض از مبدأ = $\frac{5}{2}$

ب) $3x - 4y = 2 \Rightarrow 4y = 3x - 2 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{2}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

شیب = $\frac{3}{4}$ ، عرض از مبدأ = $-\frac{1}{2}$

پ) $3y = 5x + 1 \Rightarrow y = \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$

شیب = $\frac{5}{3}$ ، عرض از مبدأ = $\frac{1}{3}$

ت) $5x - 3y - 1 = 0 \Rightarrow 3y = 5x - 1 \Rightarrow y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$

شیب = $\frac{5}{3}$ ، عرض از مبدأ = $-\frac{1}{3}$

۱۲)

شیب = ۳ $\Rightarrow 2a - 1 = 3 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$ $3 - 5(2) = 3 - 10 = -7$ عرض از مبدأ

۱۳) توجه کنید که معادله خط به صورت $y = ax + b$ است که در آن a شیب خط و b عرض از مبدأ است. بنابراین نتیجه می‌شود

الف) $y = 3x$

ب) $y = -2x + \frac{1}{3}$ یا $2x + y - \frac{1}{3} = 0$

پ) $y = -\frac{1}{2}x + 2$ یا $x + 2y - 4 = 0$

ت) این خط موازی محور x است، پس معادله آن به صورت $y = b$ است. بنابراین معادله خط عبارت است از $y = -1$.



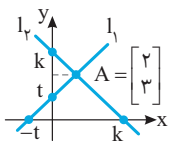
(۱۴) توجه کنید که شیب خط های نمودارهای (۱) و (۳) منفی و شیب خط های نمودارهای (۲) و (۴) مثبت است. همچنین، عرض از مبدأ خط های نمودارهای (۱) و (۴) منفی است، و عرض از مبدأ خط های نمودارهای (۲) و (۳) مثبت است. بنابراین

(الف) $1 \leftarrow$ (ب) $4 \leftarrow$

(پ) $3 \leftarrow$ (ت) $2 \leftarrow$

(۱۵) چون شیب خط برابر $-\frac{3}{2}$ است، معادله آن به صورت $y = -\frac{3}{2}x + b$ است. چون نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی این خط است، پس

$$3 = -\frac{3}{2}(-1) + b, \text{ یعنی } b = \frac{3}{2}. \text{ بنابراین معادله خط به صورت } y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}, \text{ یا } 3x + 2y = 3 \text{ است.}$$



(۱۶) در شکل، خط های l_1 و l_2 از نقطه $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ گذشته اند و فاصله محل تقاطع آن ها با محورهای

مختصات از مبدأ مختصات برابر است. شیب خط l_1 ، $\frac{t}{t} = 1$ و عرض از مبدأ آن t است، پس معادله

خط l_1 برابر است با $y = x + t$ و چون نقطه A روی این خط است پس $3 = 2 + t$ ، بنابراین $t = 1$ و

معادله خط l_1 می شود $y = x + 1$.

شیب خط l_2 ، $-\frac{k}{k} = -1$ و عرض از مبدأ آن k است، در نتیجه معادله خط l_2 به صورت $y = -x + k$ است و چون نقطه

A روی آن است، پس $3 = -2 + k$ ، در نتیجه $k = 5$. بنابراین معادله خط l_2 ، $y = -x + 5$ است.

(۱۷) شیب این خط برابر است با $\frac{2+2}{1+3} = 1$. بنابراین معادله این خط به صورت $y = x + b$ است. چون نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ روی این خط

است، پس $2 = 1 + b$ ، یعنی $b = 1$. بنابراین معادله خط به صورت $y = x + 1$ است.

(۱۸) معادله خطی که از مبدأ مختصات می گذرد به صورت $y = ax$ است. چون مختصات نقطه $\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$ جواب این معادله هستند،

پس $5 = a(-4)$ ، یعنی $a = -\frac{5}{4}$. بنابراین معادله خط مورد نظر به صورت $y = -\frac{5}{4}x$ است.

(۱۹) (الف) معادله خط گذرا از مبدأ به صورت $y = ax$ است که در آن a شیب خط است. شیب خط مورد نظر $-\frac{1}{3}$ است، پس

معادله خط مورد نظر $y = -\frac{1}{3}x$ است.

(ب) شیب خط مورد نظر $\frac{1}{4}$ و عرض از مبدأ آن 1 است، پس معادله خط مورد نظر عبارت است از $y = \frac{1}{4}x + 1$ یا $x - 4y + 4 = 0$

(پ) شیب خط مورد نظر برابر است با $\frac{2-1}{-(-3)} = \frac{1}{3}$ و عرض از مبدأ آن 2 است، پس معادله خط مورد نظر عبارت است از

$$y = \frac{1}{3}x + 2 \text{ یا } x - 3y + 6 = 0.$$

(۲۰) به شکل رسم شده توجه کنید. چون دو نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ روی خط موردنظر قرار دارند، پس مختصات آن‌ها در معادله

خط یعنی $y = ax + b$ صدق می‌کنند (یعنی جواب معادله هستند). بنابراین

$$\left. \begin{array}{l} \text{روی خط} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 0 = 2a + b \\ \text{روی خط} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow -3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

در نتیجه معادله خط موردنظر عبارت است از $y = \frac{3}{2}x - 3$ یا $3x - 2y - 6 = 0$.

(۲۱) معادله خط موردنظر به صورت $y = ax + b$ است که در آن a شیب خط است. پس معادله خط به صورت $y = -3x + b$

است. از طرف دیگر مختصات نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ جواب این معادله هستند، در نتیجه $0 = -3(-2) + b \Rightarrow 0 = 6 + b \Rightarrow b = -6$

بنابراین معادله خط موردنظر عبارت است از $y = -3x - 6$.

(۲۲) معادله خط موردنظر به صورت $y = ax + b$ است که در آن a شیب خط است. پس معادله خط به صورت $y = \frac{1}{3}x + b$ است.

مختصات نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ را در این معادله قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود $5 = \frac{1}{3}(-2) + b \Rightarrow b = 5 + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$

بنابراین معادله خط موردنظر $y = \frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$ است. تقاطع این خط با محور x در نقطه‌ای به صورت $\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}$ است، پس نتیجه

$$0 = \frac{1}{3}(k) + \frac{17}{3} \Rightarrow k = -17 \text{ می‌شود}$$

(۲۳) برای موازی شدن دو خط، باید شیب آن‌ها برابر باشد. بنابراین شیب دو خط موردنظر را به دست می‌آوریم.

شیب خط گذرا از نقاط $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ برابر است با $\frac{1 - (-3)}{-5 - 2} = -\frac{4}{7}$

شیب خط گذرا از نقاط $\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ برابر است با $\frac{3 - (-1)}{0 - 7} = -\frac{4}{7}$

بنابراین دو خط موردنظر موازی‌اند.

(۲۴) شرط موازی شدن دو خط، برابری شیب آن‌ها است، نتیجه می‌شود

$$\text{شیب خط } AB = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 2}{-3 - 1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{شیب خط } CD = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{a - 3}{3 - 5} = \frac{a - 3}{-2}$$

$$\frac{a - 3}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a - 3 = -1 \Rightarrow a = 3 - 1 \Rightarrow a = 2 \text{ پس}$$

(۲۵)

$$d_1: y = 2ax + 1 \quad d_2: y = 4x + 3$$

برای این که خط‌های d_1 و d_2 موازی باشند، باید شیب‌های برابر داشته باشند. بنابراین $2a = 4$ پس $a = 2$.



(۲۶) شرط موازی شدن دو خط، برابری شیب آنهاست. شیب خط $5x - 7y - 8 = 0$ برابر است با $\frac{5}{7}$ و شیب خط $3x + ky + 11 = 0$

برابر است با $-\frac{3}{k}$. بنابراین $\frac{-3}{k} = \frac{5}{7}$ ، پس $k = -\frac{21}{5}$.

(۲۷) شیب خط $x - 2y = 2$ برابر است با $\frac{1}{2}$. بنابراین شیب خط موردنظر هم $\frac{1}{2}$ است. چون عرض از مبدأ خط موردنظر برابر -2

است، پس معادله اش به صورت $y = \frac{1}{2}x - 2$ است، که می توان آن را به صورت $-x + 2y = -4$ نوشت.

(۲۸) چون خط موردنظر موازی با خط $2x + 3y - 6 = 0$ است، پس شیب این دو خط برابر است. شیب خط داده شده $\frac{-2}{3}$ است،

در نتیجه معادله خط موردنظر به صورت $y = \frac{-2}{3}x + b$ است. از طرف دیگر چون نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ روی خط موردنظر قرار دارد،

باید مختصات این نقطه در معادله خط صدق کند، یعنی $b + \frac{-2}{3}(4) = -3$ ، در نتیجه $b = -3 + \frac{8}{3} = \frac{-1}{3}$. بنابراین معادله خط

موردنظر برابر است با $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ یا $2x + 3y + 1 = 0$.

(۲۹) فرض کنید d_1 خط راستی باشد که از نقطه های $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ می گذرد و d_2 خط راستی باشد که از نقطه های $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ و

$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ می گذرد. کافیت نشان دهیم شیب خط های d_1 و d_2 برابر است.

$$\left. \begin{aligned} \text{شیب خط } d_1 &= \frac{5-2}{4-1} = \frac{3}{3} = 1 \\ \text{شیب خط } d_2 &= \frac{3-4}{-2-(-1)} = \frac{-1}{-1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{خط های } d_1 \text{ و } d_2 \text{ موازی اند}$$

(۳۰) چون شیب دو خط موازی، برابر است، ابتدا شیب خط گذرا از نقاط $\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ را به دست می آوریم که برابر است با

$$\frac{-2-4}{3-(-7)} = \frac{-6}{10} = \frac{-3}{5}$$

پس معادله خط موردنظر به صورت $y = -\frac{3}{5}x + b$ است. در ادامه مختصات نقطه $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ را در

معادله خط قرار می دهیم $-1 = -\frac{3}{5}(5) + b \Rightarrow -1 = -3 + b \Rightarrow b = 2$

بنابراین معادله خط موردنظر عبارت است از $y = -\frac{3}{5}x + 2$ یا $3x + 5y - 10 = 0$.

(۳۱) شیب دو خط موازی، برابر است. شیب خط $3y - 7x + 1 = 0$ برابر است با

$$3y - 7x + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{3}x - \frac{1}{3} \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{7}{3}$$

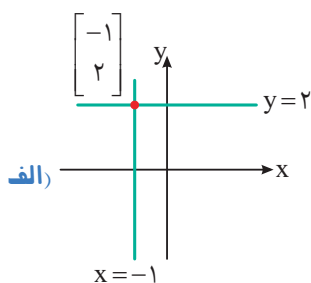
بنابراین شیب خط موردنظر هم برابر $\frac{7}{3}$ است. از طرف دیگر

$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 2k}{(k-1) - (-5)} = \frac{4 - 2k}{k - 1 + 5} = \frac{4 - 2k}{k + 4} = \frac{7}{3}$$

$$3(4 - 2k) = 7(k + 4) \Rightarrow 12 - 6k = 7k + 28 \Rightarrow 12 - 28 = 7k + 6k \Rightarrow -16 = 13k \Rightarrow k = \frac{-16}{13}$$

$$12 - 28 = 7k + 6k \Rightarrow -16 = 13k \Rightarrow k = \frac{-16}{13}$$

۳۲



با محور طول‌ها موازی است $y+3=0 \Rightarrow y=-3$ (ب)

(پ) چون خط مورد نظر موازی محور y ها است پس معادله آن باید به صورت $x=a$ باشد. از طرف دیگر خط از نقطه عبور می‌کند. پس معادله خط مورد نظر به صورت $x=-2$ است. $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

۳۳



(۳۴) چون خط مورد نظر از مبدأ مختصات می‌گذرد، معادله‌اش به صورت $y=ax$ است. چون نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی این خط است، پس $-1=a \times 3$ ، یعنی $a=-\frac{1}{3}$. بنابراین معادله خط مورد نظر به صورت $y=-\frac{1}{3}x$ است. عرض نقطه تقاطع این خط با خط $y=1$ برابر ۱ است، پس اگر طول آن x باشد، $1=-\frac{1}{3}x$ ، یعنی $x=-3$. بنابراین نقطه تقاطع مورد نظر $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ است.

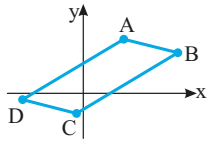
(۳۵) الف) چون خط $(2a-4)x+(3a+6)y=1$ موازی محور x است پس ضریب x باید صفر باشد. یعنی $2a-4=0 \Rightarrow a=2$. اکنون چون $a=2$ ضریب y را صفر نمی‌کند این جواب قابل قبول است.
ب) چون خط $(3a-6)x+(a+2)y=1$ موازی محور y است. پس ضریب y باید صفر باشد. یعنی $a+2=0 \Rightarrow a=-2$. اکنون چون $a=-2$ ضریب x را صفر نمی‌کند این جواب قابل قبول است.

تمرین‌های ویژه

۱) توجه کنید که B نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و D نقطه $\begin{bmatrix} -9 \\ 0 \end{bmatrix}$ است. شیب خط BD برابر است با $\frac{5-0}{3-(-9)} = \frac{5}{12}$ ، بنابراین معادله‌اش به صورت $y=\frac{5}{12}x+b$ است. چون نقطه $\begin{bmatrix} -9 \\ 0 \end{bmatrix}$ روی این خط است، پس $0=\frac{5}{12}(-9)+b$ پس $b=\frac{15}{4}$. بنابراین معادله خط BD به صورت $y=\frac{5}{12}x+\frac{15}{4}$ است.



۲ برای اثبات متوازی الاضلاع بودن یک چهارضلعی، کافی است نشان دهیم اضلاع مقابل آن موازی اند. بنابراین شیب چهار ضلع ABCD را به دست می آوریم.



$$\text{شیب خط } AB = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - 8}{14 - 6} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{شیب خط } CD = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{-1 - (-3)}{-9 - (-1)} = \frac{-1 + 3}{-9 + 1} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$$

چون شیب خط های AB و CD برابر است، پس موازی اند.

$$\text{شیب خط } AD = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{-1 - 8}{-9 - 6} = \frac{-9}{-15} = \frac{3}{5}$$

$$\text{شیب خط } BC = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-3 - 6}{-1 - 14} = \frac{-9}{-15} = \frac{3}{5}$$

شیب خط های AD و BC نیز برابر است، پس موازی اند. در نتیجه چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است.

۳ با توجه به شکل داده شده، شیب چهار ضلع ABCD را به دست می آوریم.

$$AB \text{ شیب} = \frac{1}{5}, CD \text{ شیب} = \frac{1}{5} \Rightarrow AB \parallel CD$$

$$BC \text{ شیب} = 4, AD \text{ شیب} = 4 \Rightarrow BC \parallel AD$$

چون اضلاع مقابل در چهارضلعی ABCD موازی اند، پس ABCD متوازی الاضلاع است.

پرسش های چهارگزینه ای

۱ گزینه (۲)

شیب خط گذرا از دو نقطه $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ به صورت $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ است. شیب چهار خط داده شده را به دست می آوریم

$$\text{شیب خط (۱)} = \frac{2 - 3}{2 - 1} = -1$$

$$\text{شیب خط (۲)} = \frac{2 - 3}{4 - 1} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{شیب خط (۳)} = \frac{1 - 2}{-1 - (-3)} = \frac{-1}{-1 + 3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{شیب خط (۴)} = \frac{2 - 1}{-3 - 1} = -\frac{1}{-4}$$

۲ گزینه (۱)

ابتدا شیب خط d را با استفاده از نقاط برخوردش با محورها به دست می آوریم که برابر با $-\frac{3}{2}$ است. اکنون شیب خط را با

$$\text{استفاده از نقاط } \begin{bmatrix} k \\ 3 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ به دست می آوریم: } \frac{3 - 0}{k - (-2)} = \frac{3}{k + 2} \text{ بنابراین } \frac{3}{k + 2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow k + 2 = -2 \Rightarrow k = -4$$

۳. گزینه (۲)

معادله خط موردنظر به صورت $y = \frac{1}{3}x + b$ است. چون خط موردنظر محور y را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند، پس عرض

از مبدأ آن برابر ۳ است. یعنی $b = 3$. بنابراین معادله خط موردنظر عبارت است از $y = \frac{1}{3}x + 3$ یا $x - 3y + 6 = 0$.

۴. گزینه (۳)

ابتدا شیب این خط را به دست می‌آوریم

$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - (-1)}{-1 - 1} = \frac{-5 + 1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

پس معادله خط موردنظر به صورت $y = 2x + b$ است، سپس مختصات نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ را در آن صدق می‌دهیم، یعنی مختصات

$$-1 = 2(1) + b \Rightarrow b = -1 - 2 = -3 \quad \text{جواب} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad y = 2x + b \text{ هستند. نتیجه می‌شود}$$

بنابراین معادله خط موردنظر عبارت است از $y = 2x - 3$.

۵. گزینه (۱)

ابتدا معادله خط گذرا از دو نقطه داده شده را به دست می‌آوریم. شیب خط موردنظر برابر است با $\frac{2 - (-2)}{1 - (-1)} = \frac{4}{2} = 2$. پس

معادله خط موردنظر عبارت است از $y = 2x + b$. سپس مختصات نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ را در این معادله قرار می‌دهیم:

$$2 = 2(1) + b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow y = 2x$$

بنابراین خط موردنظر از مبدأ مختصات یعنی $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

۶. گزینه (۴)

شیب خط‌های موازی با یکدیگر برابر است، پس شیب این خط‌های موازی برابر است با شیب خط $3x - 2y - 1 = 0$ ، که شیب این خط نیز $\frac{3}{2}$ است.

۷. گزینه (۱)

ابتدا توجه کنید که شیب خط $3x - 2y + 7 = 0$ برابر است با $\frac{3}{2}$ که در گزینه‌های (۳) و (۴) شیب خط‌ها برابر است با $\frac{-3}{2}$ ، در

نتیجه چون شیب این دو خط با شیب خط موردنظر برابر نیست، با آن موازی نیستند. از طرف دیگر باید مختصات نقطه

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ در معادله خط صدق کنند یعنی جواب معادله باشند، که این مورد تنها در گزینه (۱) درست است، } 3(-4) - 2(0) + 12 = 0$$

بنابراین جواب مسئله خط به معادله $3x - 2y + 12 = 0$ است.



گزینه (۲) ۸

شیب خط موردنظر باید برابر با شیب خط موازی آن باشد، چون شیب خط $2x - 3y + 8 = 0$ برابر است با $\frac{2}{3}$ ، پس معادله

خط موردنظر به صورت $y = \frac{2}{3}x + b$ است. اکنون مختصات نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ باید در این معادله صدق کنند، یعنی

$$-3 = \frac{2}{3}(2) + b \Rightarrow -3 = \frac{4}{3} + b \Rightarrow b = -3 - \frac{4}{3} = -\frac{13}{3}$$

بنابراین معادله خط موردنظر عبارت است از $y = \frac{2}{3}x - \frac{13}{3}$ یا $2x - 3y - 13 = 0$.

گزینه (۳) ۹

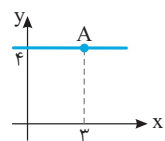
شیب دو خط موازی با یکدیگر برابر است. پس شیب خط موردنظر برابر است با شیب خط $3y = 4x - 9$:

$$3y = 4x - 9 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - 3 \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{4}{3}$$

از طرف دیگر شیب خط موردنظر به صورت زیر به دست می آید

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - k}{-4 - 3} = \frac{-k}{-7} \xrightarrow{\text{شیب خط} = \frac{4}{3}} \frac{k}{7} = \frac{4}{3} \Rightarrow k = \frac{28}{3}$$

گزینه (۴) ۱۰



معادله خطی که بر محور y عمود باشد، به صورت $y = b$ است. از طرف دیگر چون این خط از نقطه

$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ می گذرد، بنابراین معادله آن $y = 4$ است.

درس سوم: دستگاه معادله های خطی



درست یا نادرست

الف) درست ب) نادرست ب) نادرست ب) درست

کامل کنید

الف) $x = 3$, $y = -1$ ب) ۶ ب) یک جواب دارد

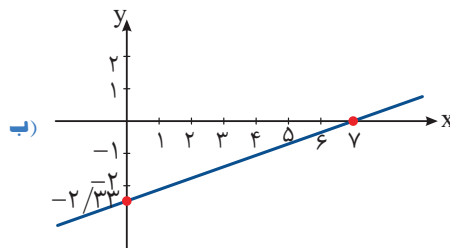
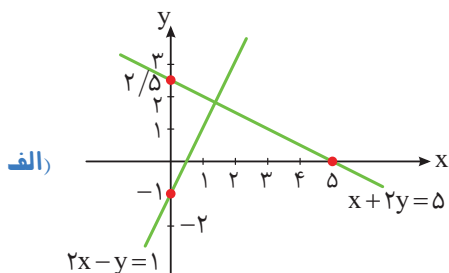
پرسش های دو گزینه ای

ب) گزینه (۲) $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{k}{1} \Rightarrow \frac{1}{3} = k$

ب) گزینه (۱) $\frac{1}{2} = \frac{-3}{-6} \neq \frac{1}{5}$

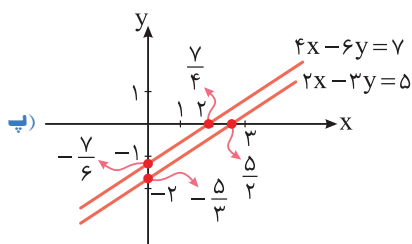
الف) گزینه (۱)

(۱)



چون خط‌های $x - 3y = 7$ و $4x - 12y = 28$ برهم منطبق هستند، دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

نقطهٔ تلاقی $= \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/8 \end{bmatrix}$



چون دو خط موازی هستند، دستگاه جواب ندارد

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$$

(۲) الف)

بنابراین از معادلهٔ اول داریم $2 \times 4 + y = 11$ ، پس $y = 3$.

$$\begin{cases} 4x + 3y = -15 \\ 5x + 3y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = -15 \\ -5x - 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow -x = -12 \Rightarrow x = 12$$

$$4(12) + 3y = -15 \Rightarrow 48 + 15 = -3y \Rightarrow y = -21$$

از معادلهٔ اول به‌دست می‌آید

$$\begin{cases} 4x + 3y = -4 \\ 6x + 5y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 9y = -12 \\ -12x - 10y = 14 \end{cases} \Rightarrow -y = 2 \Rightarrow y = -2$$

$$4x + 3(-2) = -4 \Rightarrow 4x = -4 + 6 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

از معادلهٔ اول به‌دست می‌آید

$$\begin{cases} x + 5y - 7 = 0 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 5y = 7 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 5y = 7 \\ -x + 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow 8y = 8 \Rightarrow y = 1$$

$$x - 3(1) = -1 \Rightarrow x = 2$$

از معادلهٔ دوم به‌دست می‌آید



ب

$$\begin{cases} 7x = 9y \\ 5x + 3y = 66 \end{cases} \Rightarrow 3 \times \begin{cases} 7x - 9y = 0 \\ 5x + 3y = 66 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x - 9y = 0 \\ 15x + 9y = 198 \end{cases}$$

$$\underline{22x = 198 \Rightarrow x = 9}$$

$$7 \times 9 = 9y$$

از معادله اول نتیجه می شود

$$y = 7$$

ابتدا دو معادله را در عدد مناسبی ضرب می کنیم تا مخرج کسرها ساده شود.

$$\begin{cases} 6 \times \left\{ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \right. \\ 12 \times \left\{ \frac{x}{4} + \frac{2y}{3} = 8 \right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 3x + 8y = 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 2y = -6 \\ 3x + 8y = 96 \end{cases}$$

$$\underline{10y = 90 \Rightarrow y = 9}$$

$$3x - 2(9) = 6 \Rightarrow 3x = 6 + 18 = 24 \Rightarrow x = 8$$

سپس از معادله $3x - 2y = 6$ به دست می آید

ابتدا هر دو معادله را در عدد مناسبی ضرب می کنیم تا مخرج کسرها ساده شود.

$$\begin{cases} 4 \times \left\{ 2x + \frac{x-y}{4} = 11 \right. \\ 3 \times \left\{ 3y - \frac{x+y}{3} = 1 \right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + (x-y) = 44 \\ 9y - (x+y) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x - y = 44 \\ -x + 8y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - y = 44 \\ -9x + 72y = 27 \end{cases}$$

$$\underline{71y = 71 \Rightarrow y = 1}$$

$$9x - 1 = 44 \Rightarrow 9x = 44 + 1 = 45 \Rightarrow x = 5$$

سپس از معادله $9x - y = 44$ به دست می آید

ابتدا دو معادله را ساده می کنیم و متغیرهای x و y را در یک طرف تساوی قرار می دهیم

$$\begin{cases} 1 - 3y = 2(x - 2) \\ 1 - 3x = 3y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -3x - 3y = -3 \end{cases}$$

$$\underline{-x = 2 \Rightarrow x = -2}$$

سپس از معادله $2x + 3y = 5$ به دست می آید

$$2(-2) + 3y = 5 \Rightarrow 3y = 5 + 4 = 9 \Rightarrow y = 3$$

۳

الف) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 4 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 3x = 9 \Rightarrow x = 3 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله دوم}} 3 - y = 4 \Rightarrow y = -1$

ب) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = -4 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 7y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{7}$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله دوم}} 2x - \frac{5}{7} = 3 \Rightarrow x = \frac{13}{7}$

(۴)

$$\text{الف) } \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

از معادله اول داریم $x = \frac{-3y+7}{2}$. اکنون در معادله دوم به جای x ، $\frac{-3y+7}{2}$ را قرار می‌دهیم. بنابراین:

$$3\left(\frac{-3y+7}{2}\right) - 5y = 1 \Rightarrow \frac{-19y+21}{2} = 1 \Rightarrow -19y = -19 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{در نتیجه } x = \frac{-3(1)+7}{2} = 2$$

$$\text{ب) } \begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2x + 7y = 12 \end{cases}$$

از معادله اول داریم $x = 3y + 5$. اکنون در معادله دوم به جای x ، $3y + 5$ را قرار می‌دهیم. بنابراین:

$$2(3y+5) + 7y = 12 \Rightarrow 13y + 10 = 12 \Rightarrow 13y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{13}$$

$$\text{در نتیجه } x = 3\left(\frac{2}{13}\right) + 5 = \frac{71}{13}$$

(۵) جواب دستگاه را در معادله‌ها قرار می‌دهیم، به دست می‌آید

$$\begin{cases} 9a - 2b = 3 \\ -3 \times \begin{cases} 9a - 2b = 3 \\ 3a - 3b = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a - 2b = 3 \\ -9a + 9b = 18 \end{cases} \\ \hline 7b = 21 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

سپس از معادله $9a - 2b = 3$ نتیجه می‌شود $9a - 2(3) = 3$ ، پس $a = 1$. بنابراین مقدار ab برابر است با $1 \times 3 = 3$.

(۶)

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y - 3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 7 \end{cases} \\ \hline 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

$$2 \times 3 - y = 2 \Rightarrow y = 4$$

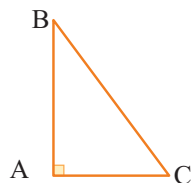
بنابراین $xy = 12$.

(۷) کافی است توان‌ها برابر صفر باشند:

$$\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ 2x + 3y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 3y + 3 = 0 \\ 2x + 3y + 8 = 0 \end{cases} \\ \hline 11x + 11 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$3(-1) - y + 1 = 0 \Rightarrow y = -2$$

(۸)



$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \\ -\hat{B} + \hat{C} = 4^\circ \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2\hat{C} = 94^\circ \Rightarrow \hat{C} = 47^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله اول}} \hat{B} + 47^\circ = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} = 43^\circ$$



۹

$$\begin{array}{l} \text{سن مادر اکرم} = y \\ \text{سن اکرم} = x \\ \begin{cases} x+y=46 \\ -x+y=20 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2y=66 \Rightarrow y=33 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله اول}} x+33=46 \Rightarrow x=13 \end{array}$$

۱۰ قیمت خودکار را x و قیمت مداد را y فرض می کنیم. در این صورت

$$-2 \times \begin{cases} 2x+y=3400 \\ x+3y=3200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=3400 \\ -2x-6y=-6400 \end{cases} \Rightarrow -5y=-3000 \Rightarrow y=600$$

سپس از معادله $2x+y=3400$ به دست می آید $2x+600=3400$

پس $x=1400$. بنابراین قیمت خودکار ۱۴۰۰ تومان و قیمت مداد ۶۰۰ تومان است.

۱۱ عدد کوچک تر را a و عدد بزرگ تر را b فرض می کنیم. در این صورت

$$3 \times \begin{cases} 3a=b+6 \\ 2a+\frac{b}{3}=31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a-b=6 \\ 6a+b=93 \end{cases} \Rightarrow 9a=99 \Rightarrow a=11$$

$$3 \times 11 = b + 6$$

سپس از معادله اول به دست می آید

پس $b=27$. بنابراین اعداد موردنظر ۱۱ و ۲۷ هستند.

۱۲ فرض کنید تعداد قوطی های یک کیلو گرمی x تا و تعداد قوطی های دو کیلو گرمی y تا باشد. در این صورت

$$\begin{cases} x+2y=120 \\ x+y=97 \end{cases} \Rightarrow y=23$$

$$x+23=97$$

سپس از معادله $x+y=97$ نتیجه می شود

پس $x=74$. بنابراین نقاش، ۷۴ قوطی یک کیلو گرمی و ۲۳ قوطی دو کیلو گرمی رنگ دریافت کرده است.

تمرین های ویژه

۱ راه حل اول: دستگاه معادله خطی وقتی بی شمار جواب دارد که دو خط داده شده بر هم منطبق باشند، یعنی یکی از معادله ها

$$(a-2)x+2y-b=k(ax+6y-9)$$

ضربیتی از معادله دیگر باشد. اگر

$$(a-2)x+2y-b=kax+6ky-9k$$

آن گاه

$$a-2=ka, \quad 6k=2, \quad -b=-9k \Rightarrow k=\frac{1}{3} \Rightarrow a-2=\frac{1}{3}a \Rightarrow a=3$$

در نتیجه

$$-b=-9k \Rightarrow b=9 \times \frac{1}{3}=3$$

$$\frac{a}{b}=1$$

$$\frac{a-2}{a}=\frac{2}{6}=\frac{b}{9} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a-2}{a}=\frac{1}{3} \Rightarrow 3a-6=a \Rightarrow a=3 \\ \frac{1}{3}=\frac{b}{9} \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

راه حل دوم: در این شرایط می توان به صورت زیر عمل کرد:

$$\frac{3}{3}=1 \quad \frac{a}{b}$$

۲ چون مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر است، پس هر یک از آن دو عبارت برابر صفر است.

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y+4=0 \end{cases}$$

$$2x+5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{2}$$

بنابراین از معادله اول به دست می آید $-\frac{5}{2}-y+1=0$ ، پس $y=\frac{-3}{2}$. بنابراین مقدار x^2-y^2 برابر است با

$$\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{16}{4} = 4$$

۳ ابتدا با استفاده از دستگاه معادله، نقطه تقاطع دو خط داده شده را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} y=-x-1 \\ y=-\frac{1}{5}x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-y=1 \\ x+2y=2 \end{cases}$$

$$y=3$$

سپس از معادله $x+y=-1$ به دست می آید $x+3=-1$ ، پس $x=-4$. بنابراین نقطه تقاطع دو خط $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ است. اگر خط

به معادله $y=4x+b$ از نقطه $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ بگذرد، نتیجه می شود $3=4(-4)+b \Rightarrow 3+16=b \Rightarrow b=19$

۴ ابتدا با استفاده از دستگاه معادله، نقطه تقاطع دو خط داده شده را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} 5x-y-7=0 \\ 3x-2y-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10x+2y=-14 \\ 3x-2y=7 \end{cases}$$

$$-7x=-7 \Rightarrow x=1$$

سپس از معادله $3x-2y-7=0$ ، نتیجه می شود $3-2y-7=0$ ، پس $y=-2$. بنابراین نقطه تقاطع دو خط $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ است.

بنابراین خط موردنظر از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ می گذرد و شیب آن برابر است با شیب خط به معادله $x+3y-5=0$ ، یعنی $-\frac{1}{3}$.

معادله خط موردنظر به صورت $y=\frac{-1}{3}x+b$ است. اکنون نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ را در این معادله قرار می دهیم، نتیجه می شود

$$-2=-\frac{1}{3}+b \Rightarrow b=-\frac{5}{3} \text{، یعنی } b=-\frac{5}{3} \text{، پس معادله خط موردنظر عبارت است از } y=\frac{-1}{3}x-\frac{5}{3} \text{ یا } x+3y+5=0.$$

۵

ابتدا با استفاده از دستگاه معادله، نقطه تقاطع دو خط داده شده را به دست می آوریم

$$\begin{cases} x+2y+3=0 \\ 2x-y+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3=0 \\ 4x-2y+10=0 \end{cases}$$

$$5x+13=0 \Rightarrow x=-\frac{13}{5}$$

سپس از معادله اول نتیجه می شود $-\frac{13}{5}+2y+3=0$ ، پس $y=-\frac{1}{5}$. اکنون توجه کنید که معادله خط موازی با محور x

به صورت $y=b$ است، پس معادله خط موردنظر عبارت است از $y=-\frac{1}{5}$.



۶ فرض کنید سن کنونی فرزانه x و سن کنونی مادرش y سال باشد (دقت کنید $y > x$).

$$\begin{cases} y-9=3(x-9) \\ (x+8)+(y+8)=78 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-9=3x-27 \\ x+y+16=78 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y=18 \\ x+y=62 \end{cases}$$

$$4x=80 \Rightarrow x=20$$

سپس از معادله $x+y=62$ نتیجه می شود $20+y=62$ ، پس $y=42$. بنابراین اکنون سن فرزانه ۲۰ سال و مادرش ۴۲ سال است.

۷ فرض کنید تعداد کمد ها x تا و تعداد میزها y تا است. در این صورت

$$-5 \times \begin{cases} 2x+y=41 \\ 3x+5y=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10x-5y=-205 \\ 3x+5y=100 \end{cases}$$

$$-7x=-105 \Rightarrow x=15$$

سپس از معادله $2x+y=41$ به دست می آید

پس $y=11$. بنابراین نجار می تواند ۱۵ کمد و ۱۱ میز درست کند.

۸ فرض کنید تعداد سکه های ۵ ریالی x تا و تعداد سکه های ۲۰ ریالی y تا باشد. در این صورت

$$-5 \times \begin{cases} x+y=24 \\ 5x+20y=225 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x-5y=-120 \\ 5x+20y=225 \end{cases}$$

$$15y=105 \Rightarrow y=7$$

سپس از معادله $x+y=24$ به دست می آید

پس $x=17$. بنابراین ۱۷ سکه ۵ ریالی و ۷ سکه ۲۰ ریالی در قلک است.

۹ در مثلث متساوی الساقین ABC ، زوایای B و C برابرند و مجموع زوایای مثلث 180° است. در این صورت

$$\begin{cases} x+4^\circ=y-9^\circ \\ x+4^\circ+y-9^\circ+x+y+3^\circ=180^\circ \end{cases}$$

$$2 \times \begin{cases} x-y=-13^\circ \\ 2x+2y=182^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2y=-26^\circ \\ 2x+2y=182^\circ \end{cases}$$

$$4x=156^\circ \Rightarrow x=39^\circ$$

سپس از معادله $x-y=-13^\circ$ نتیجه می شود $39^\circ-y=-13^\circ$ ، پس $y=52^\circ$. بنابراین اندازه زاویه A برابر است با

$$39^\circ+52^\circ+3^\circ=94^\circ$$

۱۰ در مستطیل اضلاع مقابل برابرند، در این صورت

$$\begin{cases} 2x-4=y-3 \\ 3x-5=y-1 \end{cases} \Rightarrow -1 \times \begin{cases} 2x-y=1 \\ 3x-y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+y=-1 \\ 3x-y=4 \end{cases}$$

$$x=3$$

سپس از معادله $2x-y=1$ نتیجه می شود $2(3)-y=1$ ، پس $y=5$. بنابراین محیط مستطیل برابر است با $2(4+2)=12$.

۱۱ در مثلث متساوی الاضلاع، طول سه ضلع برابر است. در این صورت می توان از برابری هر دو ضلع، یک معادله تشکیل داد

که سه معادله خواهد شد. با دو معادله از این سه معادله، دستگاه زیر را می نویسیم

$$\begin{cases} x+5=y+3 \\ 3x-y=x+5 \end{cases} \Rightarrow -1 \times \begin{cases} x-y=-2 \\ 2x-y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y=2 \\ 2x-y=5 \end{cases}$$

$$x=7$$

سپس از معادله $x-y=-2$ نتیجه می شود $7-y=-2$ ، پس $y=9$. بنابراین طول ضلع مثلث برابر است با

$$3 \times 7 - 9 = 9 + 3 = 7 + 5 = 12$$

۱ گزینه (۲)

توجه کنید که

$$12 \times \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = \frac{1}{6} \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \frac{5}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16x - 12y = -8 \\ 9x + 12y = 15 \end{cases}$$

$$\frac{-7x = 7}{-7x = 7} \Rightarrow x = -1$$

سپس از معادله $4x + 3y = 2$ به دست می‌آید $4(-1) + 3y = 2$ ، پس $y = 2$. بنابراین مقدار عبارت xy برابر است با $(-1) \times 2 = -2$.

۲ گزینه (۲)

چون مجموع دو عبارت نامنفی برابر با صفر شده است، پس هر کدام از آن‌ها برابر با صفر هستند، بنابراین

$$3 \times \begin{cases} 3x - 5y + 12 = 0 \\ -x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 5y = -12 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$$

$$\frac{y = 0}{y = 0}$$

پس حاصل عبارت xy برابر است با صفر. توجه کنید که از معادله دوم مقدار x برابر است با $-x + 2(0) - 4 = 0$ ، پس $x = -4$.

۳ گزینه (۴)

چون مجموع دو عبارت نامنفی برابر با صفر است، پس هر کدام از آن‌ها برابر صفر هستند، بنابراین $x + y - 3 = 0$ و $x - y - 1 = 0$ برای یافتن اعداد x و y باید دستگاه معادله‌های زیر را حل کنیم.

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2x - 4 = 0}{2x - 4 = 0} \Rightarrow x = 2$$

سپس از معادله اول به دست می‌آید $2 + y - 3 = 0$ ، پس $y = 1$. بنابراین مقدار عبارت $2x - y$ برابر است با $2(2) - 1 = 3$.

۴ گزینه (۴)

$$-2 \times \begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{4}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ -x + 3y - \frac{8}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{4 - \frac{8}{3} = 0}{4 - \frac{8}{3} = 0}$$

بنابراین دستگاه معادله داده شده جواب ندارد.

۵ گزینه (۳)

برای اینکه یک دستگاه معادله خطی جواب نداشته باشد، باید دو خط موازی باشند، یعنی باید شیب دو خط برابر باشد و عرض از مبدا آن‌ها برابر نباشد، در این صورت

$$\begin{cases} \frac{1}{4} = \frac{4}{1} = \frac{1}{4} \\ \frac{2}{-k} \neq \frac{1}{4} \Rightarrow -k \neq 8 \Rightarrow k \neq -8 \end{cases}$$

بنابراین مقدار k برابر با هر عددی است به جز -8 .



گزینه (۱) ۶

$$\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ (n+1)x + 2ny = 4k \end{cases}$$

ابتدا دستگاه معادله داده شده را مرتب می کنیم.

برای اینکه دستگاه معادله خطی جواب نداشته باشد، باید دو خط موازی باشند، یعنی شیب آن ها برابر باشد و عرض از مبدأ آن ها برابر نباشد، بنابراین

$$\begin{cases} \frac{3}{n+1} = \frac{-4}{2n} \neq \frac{6}{4k} \Rightarrow 5 \neq \frac{6}{4k} \Rightarrow k \neq \frac{3}{10} \\ 6n = -4n - 6 \Rightarrow 10n = -6 \Rightarrow n = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

از معادله اول مقدار n به دست می آید $n = -\frac{3}{5}$. توجه کنید که از معادله دوم $k \neq \frac{3}{10}$ به دست می آید.

گزینه (۱) ۷

برای اینکه دو خط بر هم منطبق شوند، باید یکی از معادله ها ضریبی از معادله دیگر باشد.

$$2x - 3y + 4 = k(ax + by + 1) \Rightarrow 4 = k$$

$$2x - 3y + 4 = 4ax + 4by + 4 \Rightarrow 4a = 2, 4b = -3 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{4}$$

بنابراین

$$\frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{4} \right) = -\frac{3}{8}$$

بنابراین مقدار ab برابر است با

گزینه (۱) ۸

برای اینکه یک دستگاه معادله خطی بی شمار جواب داشته باشد، باید دو خط بر هم منطبق شوند، یعنی یکی از معادله ها ضریبی از معادله دیگر باشد، در نتیجه اگر

$$k((a-4)x + 2y) = 3x - (b+1)y \Rightarrow k(2a-8)x + 2ky = 3x - (b+1)y$$

$$2((a-4)x + 2y) = 3x - (b+1)y \Rightarrow (2a-8)x + 4y = 3x - (b+1)y$$

$$\begin{cases} 2a-8=3 \\ 4=-b-1 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{11}{2}, b=-5 \Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$$

بنابراین

گزینه (۳) ۹

اعداد موردنظر را n و k فرض کنید. در این صورت

$$\begin{cases} n=2k+19 \\ \frac{n+k}{2}=2 \end{cases} \Rightarrow -1 \times \begin{cases} n-2k=19 \\ n+k=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n-2k=19 \\ -n-k=-4 \end{cases} \Rightarrow -3k=15 \Rightarrow k=-5$$

سپس از معادله اول به دست می آید $n = 2(-5) + 19 = 9$. پس $n = 9$. بنابراین اعداد موردنظر برابرند با ۹ و -۵ که حاصل ضرب آن ها -۴۵ می شود.

گزینه (۴) ۱۰

تعداد بلیط های ۸۰۰۰ تومانی را x و تعداد بلیط های ۶۰۰۰ تومانی را y فرض کنید، در نتیجه

$$\begin{cases} x+y=525 \\ 8x+6y=3580 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x-6y=-3150 \\ 8x+6y=3580 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -6x-6y & = & -3150 \\ 8x+6y & = & 3580 \\ \hline 2x & = & 430 \end{matrix} \Rightarrow x=215$$

$$215 + y = 525$$

سپس از معادله اول به دست می آید

پس $y = 310$. بنابراین مقدار تخفیف داده شده برابر است با $310 \times 2 = 620$ هزار تومان.

امتحان نهایی فصل ششم

الف) درست

ث) نادرست

ج) نادرست

ز) درست

پ) نادرست

چ) نادرست

ذ) درست

س) درست

ت) درست

ج) درست

ز) نادرست

ش) درست

الف) ۴

ث) 90°

ب) طولها

ج) $y=6$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

چ) ندارد

ت) $x=2$

ج) محور عرضها

الف) گزینه (۳)

ث) گزینه (۴)

ج) گزینه (۳)

ز) گزینه (۴)

ص) گزینه (۴)

پ) گزینه (۲)

چ) گزینه (۱)

ذ) گزینه (۳)

س) گزینه (۱)

ب) گزینه (۱)

ج) گزینه (۱)

د) گزینه (۳)

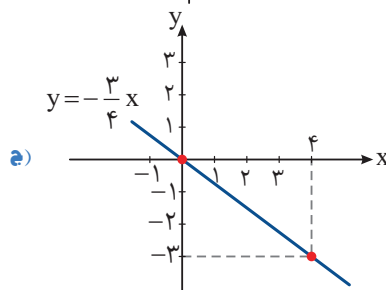
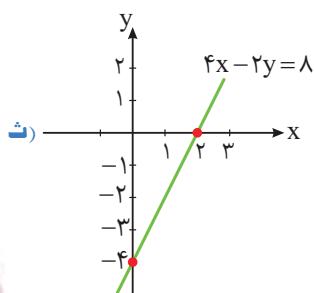
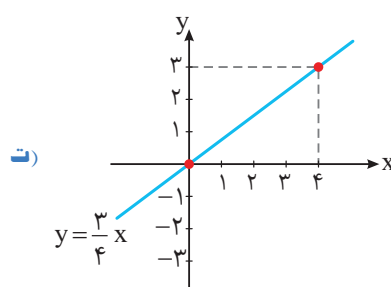
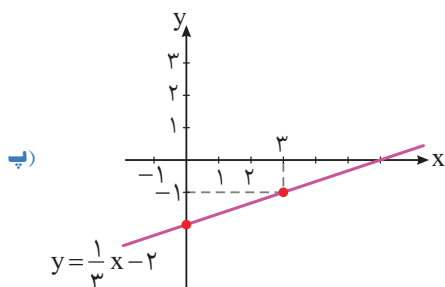
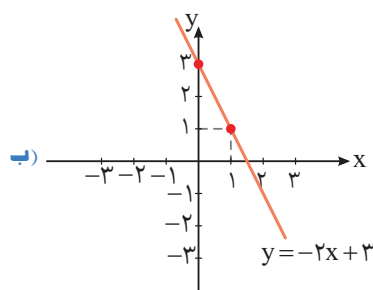
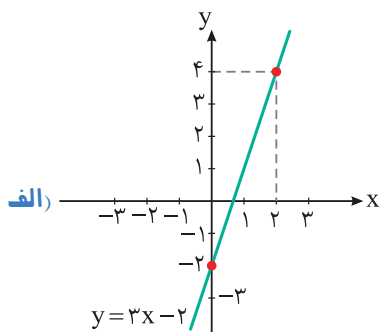
ز) گزینه (۲)

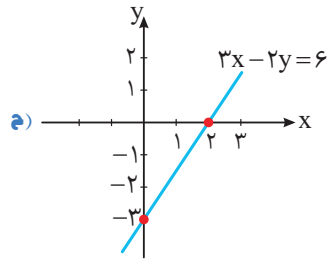
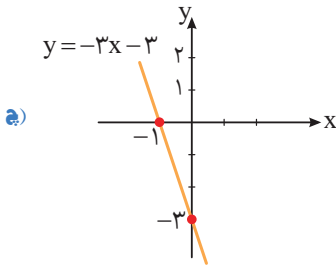
ت) گزینه (۲)

ج) گزینه (۴)

ز) گزینه (۴)

ش) گزینه (۲)





۵

$$a(-5) - 4(2) = 7 \Rightarrow -5a - 8 = 7 \Rightarrow a = -3$$

۶

الف) محیط یک مربع به ضلع a برابر $4a$ است. بنابراین رابطه بین اندازه ضلع مربع و محیط آن خطی است.
ب) مساحت یک مربع به ضلع a برابر a^2 است. بنابراین رابطه بین اندازه ضلع مربع و مساحت آن غیرخطی است.

۷

تساوی $y + 3x = 7$ به ازای همه مقادیر x و y برقرار نیست. به عنوان مثال به ازای $x = 0$ و $y = 0$ تساوی اخیر برقرار نیست. بنابراین تساوی $y + 3x = 7$ یک معادله است.

۸

$$4y - 8x = 20 \Rightarrow y = 2x + 5 \Rightarrow \text{شیب} = 2, \quad \text{عرض از مبدأ} = 5$$

۹

$$y = 2x - 3$$

۱۰

$$\text{شیب خط} = \frac{2 - 0}{0 - (-1)} = 2, \quad \text{عرض از مبدأ} = 2 \Rightarrow d: y = 2x + 2$$

۱۱

الف) چون مختصات نقطه $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ در معادله خط $y = 2x + 1$ صدق نمی کند، پس روی آن خط قرار ندارد.

$$\text{ب) شیب خط} = \frac{-2 - 1}{5 - 4} = -3$$

۱۲

$$y = 1 \quad \text{الف)}$$

$$\text{ب) } 2y - 3x = 4 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 2 \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{3}{2}$$

۱۳

$$y = 3$$

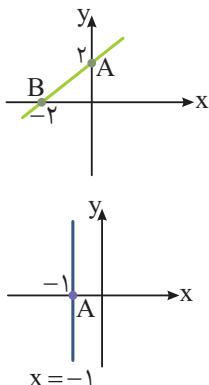
۱۴

$$y = 3$$

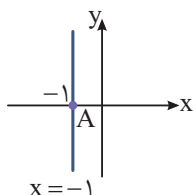
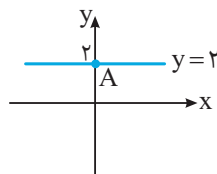
۱۵

معادله خطی که از مبدأ مختصات می گذرد به صورت $y = ax$ است. چون این خط باید با خط $y = \frac{3}{4}x - 2$ موازی باشد،

پس باید شیب خط مورد نظر با شیب خط $y = \frac{3}{4}x - 2$ برابر باشد. پس معادله خط مورد نظر به صورت $y = \frac{3}{4}x$ است.



$$\text{شیب خط} = \frac{2}{0 - (-2)} = 1, \quad 2 \Rightarrow y = x + 2 \text{ عرض از مبدأ}$$



۱۶

باید شیب خطی که از نقاط A, B و B, C می‌گذرد با هم برابر باشد. پس:

$$m_{AB} = \frac{5-2}{3-0} = \frac{3}{3}, \quad m_{BC} = \frac{2-0}{7-m} = \frac{2}{7-m}$$

$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow -\frac{3}{4} = \frac{2}{7-m} \Rightarrow m = \frac{29}{3}$$

چون خط مورد نظر با خط $y = 2x + 3$ موازی است. پس شیب آن خط باید با شیب خط $y = 2x + 3$ برابر باشد، یعنی ۲

باشد. از طرف دیگر خط مورد نظر باید از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ که همان عرض از مبدأ است عبور کند. بنابراین معادله خط مورد نظر

به صورت $y = 2x + \frac{2}{5}$ است.

الف) $\begin{bmatrix} -10 \\ -4 \end{bmatrix}$

ب) $x = -3$

۱۹

الف) شیب خط $= \frac{5-8}{-3-2} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$

ب) $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

۲۰

الف) چون خط مورد نظر با خط $2x - 4y = 8$ موازی است، پس شیب آن با شیب خط $2x - 4y = 8$ برابر است، پس

$$2x - 4y = 8 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{1}{2}$$

از طرف دیگر، خط مورد نظر از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ که همان عرض از مبدأ است عبور می‌کند. بنابراین معادله خط مورد نظر به

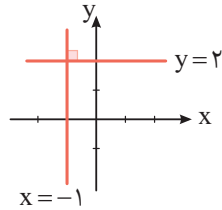
صورت $y = \frac{1}{2}x + 3$ است.

ب) شیب خط $= \frac{1 - (-3)}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2$

ب) $3(0) + 2y = 12 \Rightarrow y = 6$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$



الف) 90°



ب) چون خط مورد نظر با خط $y = -2x$ موازی است، پس شیب آن با شیب خط $y = -2x$ برابر است. از طرف دیگر خط مورد نظر از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ که همان عرض از مبدأ است عبور می کند. بنابراین معادله خط مورد نظر به صورت $y = -2x + 3$ است.

پ) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

الف) چون خط مورد نظر با خط $y = 3x + 2$ موازی است، پس شیب آن با شیب خط $y = 3x + 2$ برابر است. از طرف دیگر خط مورد نظر از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ که همان عرض از مبدأ است عبور می کند. بنابراین معادله خط مورد نظر به صورت $y = 3x + 4$ است.

ب) $0 = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

الف) محل برخورد با محور طول ها $2x - 5(0) = 10 \Rightarrow x = 5$

محل برخورد با محور طول ها $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

محل برخورد با محور عرض ها $2(0) - 5y = 10 \Rightarrow y = -2$

محل برخورد با محور عرض ها $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

ب) $y = -6x + 3$

ستون راست	ستون چپ
الف) این خط از مبدأ مختصات می گذرد	$y = x - 2$
ب) این خط موازی محور عرض ها است	$y = 2x + 1$
پ) این خط با خط $y = 2x - 2$ موازی است.	$y = -2x$
	$x = 2$

الف)
$$\begin{aligned} 2 \times \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ -3x + 2y = 4 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 6x + 8y = 14 \\ -6x - 9y = -12 \end{cases} \xrightarrow{(+)} -y = 2 \Rightarrow y = -2 \\ \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله اول}} 3x - 8 = 7 &\Rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

ب)
$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ x - 2y = -14 \end{cases} &\xrightarrow{(+)} 4x = -16 \Rightarrow x = -4 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله دوم}} -4 - 2y = -14 \Rightarrow y = 5 \end{aligned}$$

پ)
$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ 4x - 4y = 16 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 7x = 14 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله دوم}} 4 - 2y = 8 \Rightarrow y = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ت) } \begin{cases} -3x + y = 1 \\ 2x + y = 11 \end{cases} &\xrightarrow{(-)} -5x = -10 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله دوم}} 4 + y = 11 \Rightarrow y = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ث) } 2 \times \begin{cases} x + 4y = -9 \\ y - 2x = -9 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x + 8y = -18 \\ -2x + y = -9 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 9y = -27 \Rightarrow y = -3 \\ &\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله اول}} x - 12 = -9 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } -4 \times \begin{cases} x - 3y = 4 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -4x + 12y = -16 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 14y = -14 \Rightarrow y = -1 \\ &\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله اول}} x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

۲۷

الف) $y = -2x + 1 \Rightarrow 1 = \text{عرض از مبدأ}$, $\text{شیب خط} = \frac{3-1}{-1-0} = -2$

ب) $2(2) - y = 3 \Rightarrow y = 1$

۲۸

$$\begin{aligned} 2 \times \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 15x - 6y = 36 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 19x = 38 \Rightarrow x = 2 \\ 3 \times \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 3 \\ 15x - 6y = 36 \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله اول}} 4 + 3y = 1 \Rightarrow y = -1 \end{aligned}$$

۲۹

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y = 11 \\ -2x + 3y = 9 \end{cases} &\xrightarrow{(+)} 4y = 20 \Rightarrow y = 5 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله اول}} 2x + 5 = 11 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

۳۰

$$\frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} = \frac{2}{4}$$

۳۱

$$\begin{aligned} 5 \times \begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ x + 10y = 16 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 20x - 10y = 5 \\ x + 10y = 16 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 21x = 21 \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله دوم}} 1 + 10y = 16 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \\ \text{نقطه برخورد} &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۳۲

ابتدا مختصات محل برخورد را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + 2y = 0 \end{cases} &\xrightarrow{(+)} 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله دوم}} 2 + 2y = 0 \Rightarrow y = -1 \\ \text{محل برخورد} &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

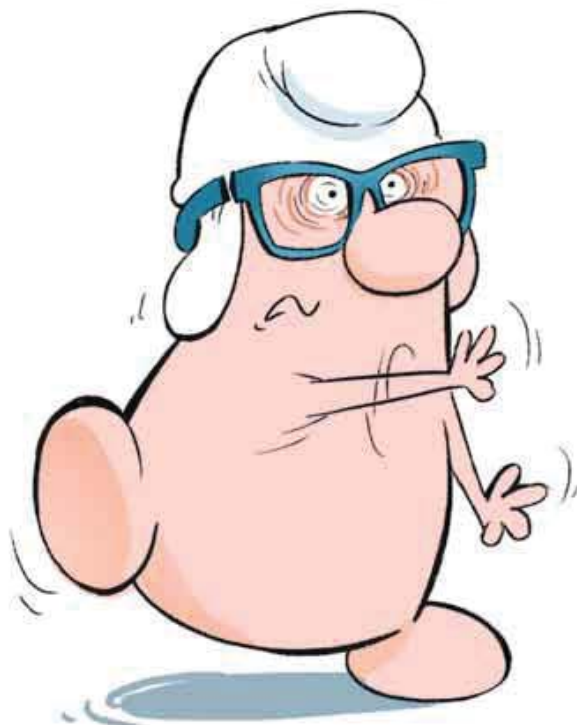
چون خط مورد نظر با خط $y = 5x - 3$ موازی است، پس شیب آن باید برابر با شیب خط $y = 5x - 3$ (یعنی ۵) باشد.

$$y = 5x + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}} -1 = 5(2) + b \Rightarrow b = -11 \Rightarrow y = 5x - 11$$

بنابراین

فصل هفتم

عبارت‌های گویا





درس اول: معرفی و ساده کردن عبارت‌های گویا



تمرین

درست یا نادرست

(ت) ✓

(پ) ✗

(ب) ✗

(الف) ✗

کامل کنید

(الف) چند جمله‌ای

(پ) $x=1, x=-1$

(ب) مخرج

$$\frac{x^2-4}{x^2-2x} = \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{x+2}{x} \quad (ت)$$

پرسش‌های دو گزینه‌ای

(ت) گزینه (۱)

(پ) گزینه (۲)

(ب) گزینه (۲)

(الف) گزینه (۲)

$$\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-1}{x+1} \quad (ت) \text{ گزینه (۱):}$$

تمرین‌های تشریحی

(۱)

(ت) گویا است.

(پ) گویا است.

(ب) گویا است.

(الف) گویا است.

(ج) گویا است.

(چ) گویا نیست.

(ج) گویا نیست.

(ث) گویا است.

(۲) (الف) به ازای هر مقدار x تعریف شده است.

(ب) $(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=1 \text{ یا } x=-1$

(پ) $\sqrt{2}x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

(ت) چون $x^2+5>0$ عبارت به ازای هر مقدار x تعریف شده است.

(ث) $x^2-x+20=0 \Rightarrow (x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{79}{4}=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{79}{4}>0$

عبارت به ازای هر مقدار x تعریف شده است.

ج) $4 - 4x + x^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$

ج) $(x^3 - 125)(x - 25) = 0 \Rightarrow x^3 = 125$ یا $x = 25 \Rightarrow x = 5$ یا $x = 25$

ج) $x^2 - 64x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 64) = 0 \Rightarrow x(x+8)(x-8) = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $x = -8$ یا $x = 8$

خ) $x^2 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $x = 1$ یا $x = 2$

د) $x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2(x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $x = -2$ یا $x = 2$

۳

الف) $\frac{a}{3} = \frac{2a^2}{6a} = \frac{3a^4}{9a^3} = \frac{5ab}{15b} = \frac{4a^2c^3}{12ac^3}$

ب) $\frac{m}{n} = \frac{4m}{4n} = \frac{2mn}{2n^2} = \frac{m^2p}{mnp} = \frac{3m^4n^3}{3m^3n^4}$

۴

الف) $9xy^2$

ب) $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$

پ) $-7x$

ت) $x^2(x-3) = x^3 - 3x^2$

ث) $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$

ج) $\frac{\boxed{}}{x^2 - y^2} = \frac{\boxed{}}{x^2 - xy} = \frac{\boxed{}}{(x+y)(x-y)} = \frac{\boxed{}}{x(x-y)} \Rightarrow \frac{x+y}{(x+y)(x-y)} = \frac{x}{x(x-y)}$

۵

الف) $\frac{5x}{2}$

ب) $\frac{1}{4x^3}$

پ) $\frac{ab}{-3d}$

ت) $\frac{y^2}{x^2}$

ث) $\frac{x^2yz}{-14}$

ج) $\frac{2z^2}{x^2}$

۶

الف) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 2x} = \frac{(x+2)^2}{x(x+2)} = \frac{x+2}{x}$

ب) $\frac{x^2 - 49}{x^2 - 14x + 49} = \frac{(x-7)(x+7)}{(x-7)^2} = \frac{x+7}{x-7}$

پ) $\frac{\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}}{\frac{1}{6}x - \frac{1}{12}} = \frac{\frac{1}{3}(x^2 - x + \frac{1}{4})}{\frac{1}{6}(x - \frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{3}(x - \frac{1}{2})^2}{\frac{1}{6}(x - \frac{1}{2})} = 2(x - \frac{1}{2})$

ت) $\frac{1 \cdot x - x^2 - 25}{3x - 15} = \frac{-(x^2 - 1 \cdot x + 25)}{3(x-5)} = \frac{-(x-5)^2}{3(x-5)} = \frac{-(x-5)}{3} = \frac{-x+5}{3}$



$$\text{د) } \frac{x^5 - y^5}{x^3 - xy^2} = \frac{(x^2 - y^2)(x^3 + y^2)}{x(x^2 - y^2)} = \frac{x^2 - y^2}{x}$$

$$\text{ج) } \frac{9x^2 - 6x + 1}{9x^2 - 1} = \frac{(3x-1)^2}{(3x-1)(3x+1)} = \frac{3x-1}{3x+1}$$

$$\text{ب) } \frac{(x+1)^5 - 1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{((x+1)^2 - 1)((x+1)^3 + 1)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x(x+2)((x+1)^2 + 1)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x(x^2 + 2x + 2)}{x+3}$$

$$\text{ا) } \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 9x + 20} = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-4)(x-5)} = \frac{x+2}{x-5}$$

$$\text{ح) } \frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2(x+1) + x+1} = \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}(x^2+1)}{\cancel{(x+1)}(x^2+1)} = x-1$$

تمرین‌های ویژه

۱

$$\text{الف) } \frac{3x - 9y}{5x^2 - 15xy} = \frac{3(x-3y)}{5x(x-3y)} = \frac{3}{5x}$$

$$\text{ب) } \frac{\lambda x^2 + 4xy}{xy + 5y^2} = \frac{\lambda x(x+5y)}{y(x+5y)} = \frac{\lambda x}{y}$$

$$\text{پ) } \frac{7x^5 - x^3y}{y^5 - 7xy^3} = \frac{x^3(7x^2 - y)}{y^3(y - 7x)} = -\frac{x^3}{y^3}$$

$$\text{ت) } \frac{3x + 15y}{x^2 - 25y^2} = \frac{3(x+5y)}{(x-5y)(x+5y)} = \frac{3}{x-5y}$$

$$\text{ث) } \frac{16x^3 - 16xy^2}{12x^3y - 12xy^3} = \frac{16\cancel{x}(x^2 - y^2)}{12\cancel{xy}(x^2 - y^2)} = \frac{4}{3y}$$

$$\text{ج) } \frac{x^3 + 2x^2y + xy^2}{x^3 - xy^2} = \frac{x(x^2 + 2xy + y^2)}{x(x^2 - y^2)} = \frac{(x+y)^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\text{ا) } \frac{y - x + 3}{y^2 - 9 - x^2 + 6x} = \frac{y - x + 3}{y^2 - (9 + x^2 - 6x)} = \frac{y - x + 3}{y^2 - (x-3)^2} = \frac{\cancel{y-x+3}}{(y+x-3)\cancel{(y-x+3)}} = \frac{1}{y+x-3}$$

۱ فقط عبارت گزینه (۱) به صورت کسری است که صورت و مخرجش چندجمله‌ای هستند. بنابراین فقط عبارت گزینه (۱) گویاست.

۲ توجه کنید که گزینه (۱) برابر است با $\frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{x^2}$ ، بنابراین عبارتی گویاست. گزینه‌های (۳) و (۴) نیز گویا هستند، اما مخرج

گزینه (۲) چندجمله‌ای نیست، پس این گزینه عبارتی گویا نیست.

۳ توجه کنید که گزینه (۴) برابر است با

$$\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}y+1\right)=\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{y+2}{2}\right)=\frac{xy+2x-2y-4}{4}$$

بنابراین عبارتی گویاست. گزینه‌های (۱) و (۲) نیز گویا هستند. اما گزینه (۳) برابر است با $\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ که مخرج آن چندجمله‌ای

نیست، پس این گزینه عبارتی گویا نیست.

۴

$$x^2-4x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x-1)=0 \Rightarrow x=1 \text{ یا } x=3$$

بنابراین عبارت گویای داده شده به ازای مقادیر ۱ و ۳ تعریف نشده است، پس $1+3=4$. (توجه کنید که در عبارت گویای داده شده

$$\frac{x-1}{(x-3)(x-1)}, \text{ عبارت } x-1 \text{ را از صورت و مخرج نباید حذف کرد.})$$

۵

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x=2 \text{ یا } x=-1$$

بنابراین $2+(-1)=1$. (توجه کنید که در عبارت گویای $\frac{x+1}{(x-2)(x+1)}$ عبارت $x+1$ را نباید از صورت و مخرج حذف کرد.)

۶

$$(x-1)(x^2-25)=0 \Rightarrow (x-1)(x-5)(x+5)=0$$

$$x=1 \text{ یا } x=5 \text{ یا } x=-5$$

بنابراین $1+5+(-5)=1$. (توجه کنید که در عبارت گویای $\frac{x-1}{(x-1)(x-5)(x+5)}$ عبارت $x-1$ را نباید از صورت و مخرج

حذف کرد.)

$$\frac{x(x-2)}{x(x-2)}=1$$

۷

$$\frac{x-x^2}{x(x-1)}=\frac{x(1-x)}{x(x-1)}=-1$$

$$\frac{3x-x^2}{x(3-x)}=\frac{x(3-x)}{x(3-x)}=1$$

$$\frac{x^2-y^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x+y)}=1$$

بنابراین تنها گزینه (۲) برابر است با -۱.



۸

$$\frac{x-1}{1-x} = -1$$

$$\frac{x^2-1}{(x+1)(1-x)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(1-x)} = -1$$

$$\frac{x-\frac{1}{x}}{x-1} = \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x-1} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{(x-2y)^2}{x^2+4y^2-4xy} = \frac{(x-2y)^2}{(x-2y)^2} = 1$$

بنابراین تنها گزینه (۴) برابر است با ۱.

۹

$$\frac{4a^3b^{10}}{8a^9b^2} = \frac{b^8}{2a^6}$$

۱۰

$$\frac{6x^2-3xy}{3xy} = \frac{3x(2x-y)}{3xy} = \frac{2x-y}{y}$$

درس دوم: محاسبات عبارتهای گویا



تمرین

درست یا نادرست

(پ) ✓

(ب) ✗

(الف) ✓

کامل کنید

$$\frac{a^2}{a^2-3a+2} \div \frac{a}{a-1} = \frac{a^2}{(a-1)(a-2)} \times \frac{a-1}{a} = \frac{a}{a-2} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{2+x}{x^2} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{1}{yax^2} \quad (\text{الف})$$

پرسشهای دو گزینه‌ای

(الف) گزینه (۱)

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

(ب) گزینه (۱)

$$1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$$

$$1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$$

تمرینهای تشریحی

(۱)

(الف) $\frac{3p^2mq^3}{2a^2b^2} \times \frac{28a^3b^4}{9p^2q^2} = \frac{14mqab^2}{3}$

(ب) $\frac{x^2-16}{x-4} \times \frac{x}{2x+8} = \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} \times \frac{x}{2(x+4)} = \frac{x}{2}$

(پ) $\frac{x-5}{x^2+6x+9} \times \frac{(x+3)^2}{x^2-25} = \frac{x-5}{(x+3)^2} \times \frac{(x+3)^2}{(x-5)(x+5)} = \frac{1}{x+5}$

(ت) $\frac{x^2-5x-14}{x^2-3x+2} \times \frac{x^2-4}{x^2-14x+49} = \frac{(x+2)(x-7)}{(x-1)(x-2)} \times \frac{(x-2)(x+2)}{(x-7)^2} = \frac{(x+2)^2}{(x-1)(x-7)}$



۲

الف) $\frac{6m^5t^4}{13np^2} \div \frac{36m^4t^3}{169n^2p^5} = \frac{6m^5t^4}{13np^2} \times \frac{13^2n^2p^5}{6^2m^4t^3} = \frac{13}{6} mntnp^3$

ب) $\frac{3p^2mq^3}{2a^2b^2} \times \frac{28a^3b^4}{9p^2q^2} = \frac{3 \times 28}{2 \times 9} \times \frac{p^2mq^3a^3b^4}{a^2b^2p^2q^2} = \frac{14}{3} mqa^2b^2$

پ) $\frac{x^2-2x+1}{2x+1} \div \frac{x-1}{4x^2-1} = \frac{(x-1)^2}{2x+1} \times \frac{(2x-1)(2x+1)}{x-1} = (x-1)(2x-1)$

ت) $\frac{a^2-4a+3}{a^2-3a+2} \div \frac{a-3}{a-2} = \frac{(a-3)(a-1)}{(a-2)(a-1)} \times \frac{a-2}{a-3} = 1$

ث) $\frac{x^2-9}{x^2+5x+6} \div \frac{3-x}{x+2} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+2)} \times \frac{x+2}{-(x-3)} = -1$

۳

الف) $3 + \frac{4}{z} - \frac{5}{z^2} = \frac{3z^2 + 4z - 5}{z^2}$

ب) $\frac{y}{3 \cdot xz} - \frac{2}{4 \Delta xy} = \frac{y(3y) - 2(2z)}{9 \cdot xyz} = \frac{21y - 4z}{9 \cdot xyz}$

پ) $\frac{4}{x^2} - \frac{3}{xy^2} + \frac{5}{x^2y} = \frac{4y^2 - 3x + 5y}{x^2y^2}$

۴

الف) $\frac{fx}{\Delta(x-3)} - \frac{\Delta y}{2(x-3)} = \frac{2(fx) - \Delta(\Delta y)}{1 \cdot (x-3)} = \frac{18x - 2\Delta y}{1 \cdot (x-3)}$

ب) $4 - \frac{3x}{\Delta - 2x} + \frac{\Delta(x-10)}{2x-\Delta} = \frac{4(2x-\Delta) - 3x(-1) + \Delta(x-10)}{2x-\Delta} = \frac{16x - 7\Delta}{2x-\Delta}$

پ) $\frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{2b}{a^2-4b^2} = \frac{a-2b}{(a-2b)(a+2b)} = \frac{1}{a+2b}$

ت) $\frac{a^2+8a}{4-a^2} - \frac{4a-4}{4-a^2} = \frac{a^2+8a-4a+4}{4-a^2} = \frac{a^2+4a+4}{4-a^2} = \frac{(a+2)^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{2+a}{2-a}$

۵

الف) $\frac{x}{(3x+1)^2} + \frac{4}{3x+1} = \frac{x+4(3x+1)}{(3x+1)^2} = \frac{13x+4}{(3x+1)^2}$

ب) $\frac{3}{a^2+a} + \frac{\Delta a}{ab+b} = \frac{3}{a(a+1)} + \frac{\Delta a}{b(a+1)} = \frac{3b+\Delta a^2}{ab(a+1)}$

پ) $\frac{\Delta}{a^2c^2-a^2b^2} - \frac{4}{a^2c+a^2b} = \frac{\Delta}{a^2(c-b)(c+b)} - \frac{4}{a^2(c+b)} = \frac{\Delta a - 4(c-b)}{a^2(c-b)(c+b)} = \frac{\Delta a - 4c + 4b}{a^2(c-b)(c+b)}$

۶

$$\text{الف)} \frac{2}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} = \frac{2}{(x-3)(x+3)} + \frac{1}{x+3} = \frac{2+x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-1}{(x-3)(x+3)}$$

$$\text{ب)} \frac{12x-5}{x^2-49} - \frac{6}{y-x} = \frac{12x-5}{(x-7)(x+7)} - \frac{6}{y-x} = \frac{12x-5-6(-1)(x+7)}{(x-7)(x+7)} = \frac{12x-5+6x+42}{(x-7)(x+7)} = \frac{18x+37}{(x-7)(x+7)}$$

$$\text{پ)} \frac{x^2-8}{2x+3} - \frac{16x-2x^3}{9-4x^2} = \frac{x^2-8}{2x+3} - \frac{2x(8-x^2)}{(3+2x)(3-2x)} = \frac{(x^2-8)(3-2x)-2x(8-x^2)}{(3+2x)(3-2x)} = \frac{(x^2-8)(3-2x+2x)}{(3+2x)(3-2x)} = \frac{3(x^2-8)}{(3+2x)(3-2x)}$$

$$\text{ت)} \frac{3x}{4x^2-1} - \frac{x+1}{2x^2+x} = \frac{3x}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{x+1}{x(2x+1)} = \frac{3x^2-(x+1)(2x-1)}{x(2x+1)(2x-1)} = \frac{x^2-x+1}{x(2x+1)(2x-1)}$$

$$\text{ث)} \frac{4+6x}{1+6x+9x^2} - \frac{2}{3x+1} = \frac{4+6x}{(3x+1)^2} - \frac{2}{3x+1} = \frac{4+6x-2(3x+1)}{(3x+1)^2} = \frac{2}{(3x+1)^2}$$

$$\text{ج)} \frac{2}{x^2-10x+25} - \frac{10}{x^2-25} = \frac{2}{(x-5)^2} - \frac{10}{(x-5)(x+5)} = \frac{2(x+5)-10(x-5)}{(x-5)^2(x+5)} = \frac{60-8x}{(x-5)^2(x+5)}$$

$$\text{د)} \frac{a^2-1}{a^2+a} - \frac{a^2-a}{a^2-2a+1} = \frac{(a-1)(a+1)}{a(a+1)} - \frac{a(a-1)}{(a-1)^2} = \frac{a-1}{a} - \frac{a}{a-1} = \frac{(a-1)^2-a^2}{a(a-1)} = \frac{1-2a}{a(a-1)}$$

$$\text{ه)} \frac{x^2-1}{x^2-2x-3} + \frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)} + \frac{(x-5)(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x-1}{x-3} + \frac{x-5}{x-3} = \frac{2x-6}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} = 2$$

۷

$$\text{الف)} \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{b^r}{b} + \frac{a^r}{a}} = \frac{\frac{a^r+b^r}{a^r b^r}}{\frac{a^r+b^r}{ab}} = \frac{ab(a^r+b^r)}{a^r b^r(a^r+b^r)} = \frac{1}{ab}$$

$$\text{ب)} \frac{a - \frac{a^2}{a+1}}{a - \frac{a}{a+1}} = \frac{\frac{a(a+1)-a^2}{a+1}}{\frac{a(a+1)-a}{a+1}} = \frac{\frac{a}{a+1}}{\frac{a^2}{a+1}} = \frac{a(a+1)}{a^2(a+1)} = \frac{1}{a}$$

$$\text{پ)} \frac{a - \frac{6a-9}{a}}{1 - \frac{3}{a}} = \frac{\frac{a^2-6a+9}{a}}{\frac{a-3}{a}} = \frac{\frac{(a-3)^2}{a}}{\frac{a-3}{a}} = \frac{a(a-3)^2}{a(a-3)} = a-3$$

$$\text{ت)} \frac{1 - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x} - 2} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x^2+1-2x}{x}} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{(x-1)^2}{x}} = \frac{x(x-1)}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}$$



$$\text{ث) } \frac{\frac{a-b}{a+b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{a+b} - \frac{a-b}{a}} = \frac{\frac{a(a-b)+b(a+b)}{a(a+b)}}{\frac{a^2-(a-b)(a+b)}{a(a+b)}} = \frac{\frac{a^2+b^2}{a(a+b)}}{\frac{b^2}{a(a+b)}} = \frac{a(a+b)(a^2+b^2)}{ab^2(a+b)} = \frac{a^2+b^2}{b^2}$$

$$\text{ج) } \frac{\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b}}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}} \times \frac{a}{b} = \frac{\frac{a-b-a-b}{(a+b)(a-b)}}{\frac{a-b+a+b}{(a+b)(a-b)}} \times \frac{a}{b} = \frac{-2b}{2a} \times \frac{a}{b} = -1$$

$$\text{د) } \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{3x^2+2x-1}{x^2}}{\frac{6x^2-5x+1}{x^2}} = \frac{3x^2+2x-1}{6x^2-5x+1} = \frac{3(x-\frac{1}{3})(x+1)}{2(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})} = \frac{(x+1)}{2(x-\frac{1}{2})} = \frac{x+1}{2x-1}$$

$$\text{ه) } \frac{\frac{1}{a} - \frac{2}{a-1}}{\frac{3}{a-1} + \frac{5}{a}} = \frac{\frac{a-1-2a}{a(a-1)}}{\frac{3a+5a-5}{a(a-1)}} = \frac{-a-1}{8a-5}$$

$$\text{و) } \frac{\frac{2a-b}{b} + 1}{\frac{2a^2+b}{b} - 1} = \frac{\frac{2a-b+b}{b}}{\frac{2a^2+b-b}{b}} = \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a}$$

۸

$$\text{الف) } \left(\frac{a}{a+1} + 1 \right) \div \left(1 - \frac{a}{a+1} \right) = \frac{a+(a+1)}{a+1} \div \frac{a+1-a}{a+1} = \frac{2a+1}{a+1} \times \frac{a+1}{1} = 2a+1$$

$$\text{ب) } \left(1 + \frac{a+b}{a-b} \right) \left(2 - \frac{2a}{a+b} \right) = \frac{a-b+a+b}{a-b} \times \frac{2(a+b)-2a}{a+b} = \frac{2a}{a-b} \times \frac{2b}{a+b} = \frac{4ab}{(a-b)(a+b)}$$

$$\frac{a-1}{a+2} = \frac{a-2+1}{a+2} = \frac{a}{a+2} - \frac{2}{a+2} + \frac{1}{a+2} \quad \text{ب)}$$

$$\frac{a+1}{a-2} = \frac{a}{a-2} + \frac{1}{a-2} \quad \text{الف) ۹)}$$

$$\frac{a+1}{a-2} = \frac{a+1}{a^2+1} \times \frac{a^2+1}{a^2+2} \times \frac{a^2+2}{a-2} \quad \text{ب)}$$

$$\frac{a+1}{a-2} = (a+1) \left(\frac{1}{a-2} \right) \quad \text{الف) ۱۰)}$$

۱۱

$$\text{مساحت مستطیل} = (a^2+a-2) \frac{a+1}{a+2} = (a-1)(a+2) \times \frac{a+1}{a+2} = (a-1)(a+1) = a^2-1$$

۱۲) فرض کنید عرض مستطیل برابر A باشد. در این صورت

$$\frac{a^2+2a-8}{a+2} \times A = a^2-4 \Rightarrow \frac{(a-2)(a+4)}{a+2} \times A = (a-2)(a+2) \Rightarrow A = \frac{(a-2)(a+2)}{(a-2)(a+4)} = \frac{(a+2)}{a+4}$$

۱

الف) $\frac{a^r - ab}{b^r + ab} \times \frac{a^r b + ab^r}{b^r - a^r b} = \frac{a(a-b)}{b(b+a)} \times \frac{ab(a+b)}{b(b-a)(b+a)} = \frac{-a^r}{b(b+a)}$

ب) $\frac{(a^r + ab)^r}{a^r - b^r} \div \frac{(a+b)^r}{(ab - b^r)^r} = \frac{(a(a+b))^r}{(a-b)(a+b)} \times \frac{(b(a-b))^r}{(a+b)^r} = \frac{a^r(a+b)^r b^r(a-b)^r}{(a-b)(a+b)^r} = \frac{a^r b^r(a-b)}{a+b}$

پ) $\frac{x^r + y^r}{x^r - xy} \div \frac{x^r y - y^r}{x^r y - xy^r} = \frac{x^r + y^r}{x(x-y)} \times \frac{xy(x-y)}{y(x^r + y^r)(x^r - y^r)} = \frac{1}{x^r - y^r}$

ت) $\frac{64x^r y^r - 1}{x^r - 4} \times \frac{(x+2)^r}{x^r - 4} \times \frac{(x-2)^r}{\lambda xy + 1} = \frac{(\lambda xy - 1)(\lambda xy + 1)(x+2)^r(x-2)^r}{(x-2)^r(x+2)^r(\lambda xy + 1)} = \lambda xy - 1$

ث) $\frac{7a^r b^r}{3a - 3b} \times \frac{6b^r - 12ab + 6a^r}{49a^r b^r} = \frac{7a^r b^r}{3(a-b)} \times \frac{6(a-b)^r}{49a^r b^r} = \frac{2}{7} \times \frac{a-b}{a}$

ج) $\frac{x^r - 49}{x^r + 2xy + y^r} \times \frac{x+y}{x-7} = \frac{(x-7)(x+7)}{(x+y)^r} \times \frac{x+y}{x-7} = \frac{x+y}{x+y}$

۲

الف) $\frac{a^r}{a^r - 2a + 1} + \frac{7}{1-a} + \frac{2+a}{1+a} = \frac{a^r}{(1-a)^r} + \frac{7}{1-a} + \frac{2+a}{1+a} = \frac{a^r(1+a) + 7(1-a)(1+a) + (2+a)(1-a)}{(1-a)^r(1+a)}$

$= \frac{7a^r - 6a^r - 3a + 9}{(1-a)^r(1+a)} = \frac{7a^r(a-3) - 3(a-3)}{(1-a)^r(1+a)} = \frac{(7a^r - 3)(a-3)}{(1-a)^r(1+a)}$

ب) $\frac{18}{9 - 4a^r} - \frac{4}{2a+3} + \frac{3}{2a-3} = \frac{18}{(3-2a)(3+2a)} - \frac{4}{3+2a} + \frac{-3}{3-2a} = \frac{18 - 4(3-2a) - 3(3+2a)}{(3-2a)(3+2a)}$

$= \frac{2a-3}{-(2a-3)(2a+3)} = \frac{-1}{2a+3}$

پ) $\frac{x+y}{x} - \frac{x}{x-y} - \frac{y^r}{x^r - xy} = \frac{x+y}{x} - \frac{x}{x-y} - \frac{y^r}{x(x-y)} = \frac{(x+y)(x-y) - x^r - y^r}{x(x-y)} = \frac{x^r - y^r - x^r - y^r}{x(x-y)} = \frac{-2y^r}{x(x-y)}$

ت) $x - \frac{xy}{x+y} - \frac{x^r}{x^r - y^r} = x - \frac{xy}{x+y} - \frac{x^r}{(x+y)(x-y)} = \frac{x(x+y)(x-y) - xy(x-y) - x^r}{(x+y)(x-y)} = \frac{-x^r y}{(x+y)(x-y)}$

ث) $\frac{4}{a-b} + \frac{9}{a+b} - \frac{\lambda a}{a^r - b^r} = \frac{4(a+b) + 9(a-b) - \lambda a}{(a-b)(a+b)} = \frac{5a - 5b}{(a-b)(a+b)} = \frac{5(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{5}{a+b}$

۳

$\frac{a}{a+3} = \frac{a-1+1}{a+3} = \frac{a-1}{a+3} + \frac{1}{a+3}$



روش اول: ۴

$$\frac{2}{a^2-1} = \frac{2}{(a+1)(a-1)} = \frac{2+a-a}{(a+1)(a-1)} = \frac{(a+1)+(-a+1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{a+1}{(a+1)(a-1)} + \frac{-a+1}{(a+1)(a-1)} = \frac{1}{a-1} + \frac{-1}{a+1}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a^2-1} &= \frac{2}{(a-1)(a+1)} = \frac{A}{a-1} + \frac{B}{a+1} \Rightarrow \frac{A(a+1)+B(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{2}{(a-1)(a+1)} \Rightarrow \frac{Aa+A+Ba-B}{(a-1)(a+1)} = \frac{2}{(a-1)(a+1)} \\ \Rightarrow \frac{(A+B)a+A-B}{(a-1)(a+1)} &= \frac{2}{(a-1)(a+1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=2 \end{cases} \Rightarrow A=1, B=-1 \Rightarrow \frac{2}{a^2-1} = \frac{1}{a-1} + \frac{-1}{a+1} \end{aligned}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱

$$\left(\frac{a-b}{2a^2}\right)^f \left(\frac{2a^2}{a^2-b^2}\right)^f = \frac{(a-b)^f}{1 \cdot 2^f a^{2f}} \times \frac{2^f a^{2f}}{(a-b)^f (a+b)^f} = \frac{2^f a^{2f} (a-b)^f}{2^f a^{2f} (a-b)^f (a+b)^f} = \frac{1}{(a+b)^f}$$

۲

$$\frac{2b}{a^2+ab} - \frac{2a}{b^2+ab} = \frac{2b}{a(a+b)} - \frac{2a}{b(a+b)} = \frac{2b^2-2a^2}{ab(a+b)} = \frac{2(b-a)(b+a)}{ab(a+b)} = \frac{2(b-a)}{ab}$$

۳

$$\frac{a+f}{a^2} - \frac{fa^f+1}{a^{f+1}} = \frac{a^f(a+f)-(fa^f+1)}{a^{f+1}} = \frac{a^{f+1}+fa^{f+1}-fa^{f+1}-1}{a^{f+1}} = \frac{a^{f+1}-1}{a^{f+1}}$$

۴

$$\frac{x^2+1 \cdot x+2\Delta}{x^2+\Delta x} \div \frac{x^2-2\Delta}{x^2} = \frac{(x+\Delta)^2}{x(x+\Delta)} \times \frac{x^2}{(x-\Delta)(x+\Delta)} = \frac{x^2}{x-\Delta}$$

۵

$$\frac{a-b}{ab} \div \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{a-b}{ab} \div \left(\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\right) = \frac{a-b}{ab} \times \frac{a^2b^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{ab}{a+b}$$

۶

$$\left(\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b}\right) \div \frac{ab}{a+b} = \left(\frac{a(a+b)-a(a-b)}{(a-b)(a+b)}\right) \times \frac{a+b}{ab} = \frac{2ab}{(a-b)(a+b)} \times \frac{a+b}{ab} = \frac{2}{a-b}$$

۷

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) \div (a+b) = \frac{a^2+b^2+2ab}{ab} \div (a+b) = \frac{(a+b)^2}{ab} \times \frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{ab}$$

۸

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} = \frac{\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}}{\frac{a^2-b^2}{ab}} = \frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{a-b}{a+b}$$

درس سوم: تقسیم چند جمله‌ای‌ها



تمرین

درست یا نادرست ☒ ☐

(ت) ☒

(پ) ☒

(ب) ☒

(الف) ☒

کامل کنید

$$\frac{xy^3 + x^3y}{x^4y^4} = \frac{xy^3}{x^4y^4} + \frac{x^3y}{x^4y^4} = \frac{1}{x^3y} + \frac{1}{xy^3} \quad (ب)$$

$$\frac{x^3 - 2x^2}{x^4} = \frac{x^3}{x^4} - \frac{2x^2}{x^4} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \quad (الف)$$

(ت) ۲

(پ) ۳

پرسش‌های دو گزینه‌ای

(الف) گزینه (۱)

$$\begin{array}{r} x^3 - x \\ - (x^3 + 2x^2) \\ \hline -2x^2 - x \\ - (-2x^2 - 4x) \\ \hline 3x \\ - (3x + 6) \\ \hline -6 \end{array} \quad \begin{array}{r} x+2 \\ x^2-2x+3 \\ \hline \end{array}$$

(ب) گزینه (۲)

$$\begin{array}{r} x^4 + x \\ - (x^4 - x^2) \\ \hline x^2 + x \\ - (x^2 - 1) \\ \hline x+1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2-1 \\ x^2+1 \\ \hline \end{array}$$



$$\begin{array}{r} x^5 + 1 \\ x^5 - 2x^3 \\ \hline 2x^3 + 1 \\ - \\ 2x^3 - 4x \\ \hline 4x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 - 2x \\ x^2 + 2 \\ \hline \end{array}$$

تمرین‌های تشریحی

۱)

الف) $\frac{x^2}{3}$

ب) $\frac{2}{3y}$

پ) $\frac{a}{byz^2}$

ت) $x^2 - 3x + 1 + \frac{1}{x}$

ث) $\frac{x^2 - 3x^3 + x^2 + x - 4}{2x} = -\frac{3}{2}x^2 + x - \frac{2}{x} + \frac{1}{2}$

ج) $xy - 1 + \frac{1}{xy}$

د) $\frac{7x^2y^4 - 3x^3y + 4xy^4}{3xy} = \frac{7}{3}xy^3 - x^2 + \frac{4}{3}y^3$

ه) $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$

۲)

الف) $\begin{array}{r} x^2 + x - 2 \\ x^2 - 2x \\ \hline 3x - 2 \\ - \\ 3x - 6 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} x - 2 \\ x + 3 \\ \hline \end{array}$

ب) $\begin{array}{r} -x^2 + 2x + 4 \\ -x^2 + 2x \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} x - 2 \\ -x \\ \hline \end{array}$

پ) $\begin{array}{r} 0/1x^2 - 0/2 \\ 0/1x^2 + 0/21x \\ \hline -0/21x - 0/2 \\ - \\ -0/21x - 0/441 \\ \hline 0/241 \end{array} \quad \begin{array}{r} x + 2/1 \\ 0/1x - 0/21 \\ \hline \end{array}$

ت) $\begin{array}{r} a^2 - 2a + 3 \\ a^2 + \frac{1}{2}a \\ \hline -\frac{5}{2}a + 3 \\ - \\ -\frac{5}{2}a - \frac{5}{4} \\ \hline \frac{17}{4} \end{array} \quad \begin{array}{r} 2a + 1 \\ \frac{1}{2}a - \frac{5}{4} \\ \hline \end{array}$

$$\begin{array}{r} \text{ث) } - \quad \begin{array}{r} -4x^3 + 2x^2 - x + 1 \\ -4x^3 - 8x^2 \\ \hline 10x^2 - x + 1 \\ - \quad 10x^2 + 20x \\ \hline -21x + 1 \\ - \quad -21x - 42 \\ \hline 43 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+2 \\ -4x^2+10x-21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ج) } - \quad \begin{array}{r} 2x^3 - x^2 + 3 \\ 2x^3 - 6x^2 \\ \hline 5x^2 + 3 \\ - \quad 5x^2 - 15x \\ \hline 15x + 3 \\ - \quad 15x - 45 \\ \hline 48 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x-3 \\ 2x^2+5x+15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ج) } - \quad \begin{array}{r} a^3 + a^2 + a + 1 \\ a^3 + a \\ \hline a^2 + 1 \\ - \quad a^2 + 1 \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2+1 \\ a+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ج) } - \quad \begin{array}{r} x^4 \\ x^4 - x^2 \\ \hline x^2 \\ - \quad x^2 - 1 \\ \hline 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2-1 \\ x^2+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ج) } - \quad \begin{array}{r} 3x^4 - x^2 \\ 3x^4 - 3x^2 \\ \hline 2x^2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2-x \\ 3x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ج) } - \quad \begin{array}{r} a^4 + a^2 - 2a - 1 \\ a^4 - a^3 \\ \hline a^3 + a^2 - 2a - 1 \\ - \quad a^3 - a^2 \\ \hline 2a^2 - 2a - 1 \\ - \quad 2a^2 - 2a \\ \hline -1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-1 \\ a^3+a^2+2a \end{array}$$

باقی مانده + (خارج قسمت) × (مقسوم علیه) = مقسوم

$$\text{مقسوم} = (x^2+1) \times (x^2-x) + 3 \Rightarrow \text{مقسوم} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 3$$

۳

۴

$$\text{باقی مانده} - \text{مقسوم} = \frac{\text{مقسوم علیه}}{\text{خارج قسمت}} \Rightarrow \text{مقسوم علیه} = \text{باقی مانده} + (\text{خارج قسمت}) \times (\text{مقسوم علیه}) = \text{مقسوم}$$

$$\text{مقسوم علیه} = \frac{x^4 + x^3 + 2x + 1 - (-16x + 1)}{x^2 - 2x + 6} = \frac{x^4 + x^3 + 18x}{x^2 - 2x + 6}$$

$$\begin{array}{r} - \quad \begin{array}{r} x^4 + x^3 + 18x \\ x^4 - 2x^3 + 6x^2 \\ \hline 3x^3 - 6x^2 + 18x \\ - \quad 3x^3 - 6x^2 + 18x \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$



$$(x-1)(2x+3)=2x^2+x-3$$

۵) توجه کنید که مساحت قاعدهٔ آکواریوم برابر است با

بنابراین حجم آب را بر مساحت قاعده تقسیم می‌کنیم تا ارتفاع آب درون آکواریوم به دست بیاید. توجه کنید که

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 \quad | \quad 2x^2 + x - 3 \\ - \quad 2x^3 + x^2 - 3x \\ \hline -4x^2 - 2x + 6 \\ - \quad -4x^2 - 2x + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

بنابراین ارتفاع آب درون آکواریوم برابر است با $x-2$.

۶) توجه کنید که $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ و

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x + 3 \quad | \quad x^2 - 2x + 1 \\ - \quad x^4 - 2x^3 + x^2 \\ \hline x^3 + x^2 - 5x + 3 \\ - \quad x^3 - 2x^2 + x \\ \hline 3x^2 - 6x + 3 \\ - \quad 3x^2 - 6x + 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

۷)

$$\begin{array}{r} 7x^3 - 2x^2 + 3x + a \quad | \quad 3x + 2 \\ - \quad 7x^3 + \frac{14}{3}x^2 \\ \hline -\frac{20}{3}x^2 + 3x + a \\ - \quad -\frac{20}{3}x^2 - \frac{40}{9}x \\ \hline \frac{67}{9}x + a \\ - \quad \frac{67}{9}x + \frac{134}{27} \\ \hline a - \frac{134}{27} \end{array}$$

با توجه به بخش‌پذیری، باقی‌مانده باید برابر صفر باشد. بنابراین:

$$a - \frac{134}{27} = 0 \Rightarrow a = \frac{134}{27}$$

۸)

$$\begin{array}{r} 16x^4 + 2ax^2 + 1 \quad | \quad 2x^2 - 1 \\ - \quad 16x^4 - 8x^2 \\ \hline (8+2a)x^2 + 1 \\ - \quad (8+2a)x^2 - (4+a) \\ \hline a + 5 \end{array}$$

چون باقی‌مانده باید برابر صفر باشد، پس $a+5=0$ ، در نتیجه $a=-5$.

۱

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 2x^2 + x - 3 \\
 - \quad x^3 + ax \\
 \hline
 2x^2 + (1-a)x - 3 \\
 - \quad 2x^2 + 2a \\
 \hline
 (1-a)x - 2a - 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x^2 + a \\
 x + 2
 \end{array}$$

بنابراین چون باقی‌مانده تقسیم برابر است با $-x-7$ ، نتیجه می‌شود

$$(1-a)x - 2a - 3 = -x - 7 \Rightarrow \begin{cases} 1-a = -1 \\ -2a - 3 = -7 \end{cases} \Rightarrow a = 2$$

۲

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 3x^3 - x^2 + ax + b \\
 - \quad x^4 + x^2 \\
 \hline
 -3x^3 - 2x^2 + ax + b \\
 - \quad -3x^3 - 3x \\
 \hline
 -2x^2 + (a+3)x + b \\
 - \quad -2x^2 - 2 \\
 \hline
 (a+3)x + b + 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x^2 + 1 \\
 x^2 - 3x - 2
 \end{array}$$

بنابراین چون چندجمله‌ای باقی‌مانده تقسیم برابر است با $2x-1$ ، نتیجه می‌شود

$$(a+3)x + b + 2 = 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} a+3 = 2 \\ b+2 = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1, \quad b = -3$$

پس مقدار عبارت $a+b$ برابر است با

$$-1 + (-3) = -4$$

۳

$$\begin{aligned}
 x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x + 2 &= (x^2 - ax)(x^2 - x) + bx + c = x^4 - x^3 - ax^3 + ax^2 + bx + c \\
 &= x^4 + (-1-a)x^3 + ax^2 + bx + c
 \end{aligned}$$

با مقایسه دو طرف تساوی، $a=1$ ، $b=3$ و $c=2$.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 2x + 1 \\ - x^3 + x \\ \hline x^2 - 3x + 1 \\ - x^2 + 1 \\ \hline -3x \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 1 \\ x + 1 \end{array}$$

۲

$$\begin{array}{r} x^6 + 3x^3 - 2 \\ - x^6 - x^5 \\ \hline x^5 + 3x^3 - 2 \\ - x^5 - x^2 \\ \hline 3x^3 + x^2 - 2 \\ - 3x^3 - 3x \\ \hline x^2 + 3x - 2 \\ - x^2 - 1 \\ \hline 3x - 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - 1 \\ x^5 + x^2 + 3x + 1 \end{array}$$

۳

$$\begin{array}{r} x^2 + x + n \\ - x^2 + 1 \\ \hline x + (n-1) \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 1 \\ 1 \end{array}$$

$$x + (n-1) = x + 4 \Rightarrow n-1 = 4 \Rightarrow n = 5$$

بنابراین نتیجه می‌شود

۴

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 10x^2 - 3x - 15 \\ - 2x^3 + 2bx^2 \\ \hline (10-2b)x^2 - 3x - 15 \\ - (10-2b)x^2 + b(10-2b)x \\ \hline (-3-b(10-2b))x - 15 \\ - (-3-b(10-2b))x - b(3+b(10-2b)) \\ \hline b(3+b(10-2b)) - 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} x + b \\ 2x^2 + (10-2b)x - (3+b(10-2b)) \end{array}$$

$$3b + b^2(10-2b) - 15 = 0 \Rightarrow 2b^3 - 10b^2 - 3b + 15 = 0$$

$$2b^2(b-5) - 3(b-5) = 0 \Rightarrow (b-5)(2b^2-3) = 0$$

$$b = 5 \text{ یا } b = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ یا } b = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

بنابراین باقی‌مانده باید برابر با صفر باشد، در نتیجه

برای به‌دست آوردن مقدار b ، این عبارت را تجزیه می‌کنیم.

۵

$$\begin{array}{r}
 x^3 - ax^2 + 3x + 2 \\
 - \quad x^3 + x^2 \\
 \hline
 (-a-1)x^2 + 3x + 2 \\
 - \quad (-a-1)x^2 - (a+1)x \\
 \hline
 (a+4)x + 2 \\
 - \quad (a+4)x + (a+4) \\
 \hline
 -a-2
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} x+1 \\ x^2 - (a+1)x + (a+4) \end{array} \right.$$

چون $-a-2=-3$ ، پس $a=1$.

۶ ارتفاع استوانه‌ها را h فرض کنید. می‌دانیم حجم استوانه برابر است با مساحت قاعده ضرب در ارتفاع آن. توجه کنید حجم آب بین دو استوانه برابر است با تفاضل حجم دو استوانه، نتیجه می‌شود

$$2x^3 + x^2 + 7x + 15 = h((3x+2) - (x-1)) = h(2x+3)$$

بنابراین

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + x^2 + 7x + 15 \\
 - \quad 2x^3 + 3x^2 \\
 \hline
 -2x^2 + 7x + 15 \\
 - \quad -2x^2 - 3x \\
 \hline
 10x + 15 \\
 - \quad 10x + 15 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} 2x+3 \\ x^2 - x + 5 \end{array} \right.$$

در نتیجه ارتفاع استوانه‌ها برابر است با $x^2 - x + 5$.

۷

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - mx^2 + nx + 4 \\
 - \quad 2x^3 - 2x \\
 \hline
 -mx^2 + (n+2)x + 4 \\
 - \quad -mx^2 + m \\
 \hline
 (n+2)x + 4 - m
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 1 \\ 2x - m \end{array} \right.$$

چون باقی‌مانده برابر است با صفر، پس

$$\begin{cases} n+2=0 \\ 4-m=0 \end{cases} \Rightarrow n=-2, m=4$$

بنابراین مقدار عبارت $m+n$ برابر است با $-2+4=2$.



۸

$$\begin{array}{r}
 mx^3 + 3x^2 + 4x + n \\
 - \quad mx^3 + mx^2 \\
 \hline
 (3-m)x^2 + 4x + n \\
 - \quad (3-m)x^2 + (3-m)x \\
 \hline
 (m+1)x + n
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{r} x^2 + x \\ mx + (3-m) \end{array} \right.$$

بنابراین نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} m+1=2 \Rightarrow m=1 \\ n=-1 \end{cases}$$

پس $mn = -1$.

۹

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - (m+1)x^2 - nx + 3m-1 \\
 - \quad 2x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 (1-m)x^2 - nx + 3m-1 \\
 - \quad (1-m)x^2 - (1-m)x \\
 \hline
 (1-m-n)x + 3m-1
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{r} x^2 - x \\ 2x + (1-m) \end{array} \right.$$

از آن جایی که باقی‌مانده برابر صفر است، در نتیجه

$$\begin{cases} 1-m-n=0 \\ 3m-1=0 \Rightarrow m=\frac{1}{3} \Rightarrow 1-\frac{1}{3}-n=0 \Rightarrow n=\frac{2}{3} \end{cases}$$

پس مقدار عبارت $m-n$ برابر است با $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

۱۰ توجه کنید که

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 2x^2 + 3x + 5 \\
 - \quad x^3 + 2x^2 \\
 \hline
 -4x^2 + 3x + 5 \\
 - \quad -4x^2 - 8x \\
 \hline
 11x + 5 \\
 - \quad 11x + 22 \\
 \hline
 -17
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{r} x + 2 \\ x^2 - 4x + 11 \end{array} \right.$$

بنابراین نتیجه می‌شود $a=1$ ، $b=-4$ ، $c=11$ و $d=-17$ ، پس مقدار عبارت $a+b+c+d$ برابر است با $1+(-4)+11+(-17)=-9$.

امتحان نهایی فصل هفتم

۱

الف) درست

ب) نادرست

ج) درست

۲

الف) $\frac{1}{5}$

ب) ۵

ب) نادرست

ج) درست

پ) درست

ج) نادرست

ت) نادرست

ج) درست

ب) چند جمله‌ای

ج) گویا

پ) ۶

ت) صفر

$$\frac{-5x^3y^2}{10x^2y^4} = \frac{-x}{2y^2} \quad \text{ج}$$

۳

الف) گزینه (۲)

ب) گزینه (۳)

ج) گزینه (۲)

د) گزینه (۲)

ب) گزینه (۳)

ج) گزینه (۲)

د) گزینه (۱)

ز) گزینه (۳)

پ) گزینه (۳)

ج) گزینه (۳)

د) گزینه (۴)

س) گزینه (۱)

ت) گزینه (۱)

ج) گزینه (۴)

د) گزینه (۲)

ش) گزینه (۴)

۴

الف) $x = \frac{1}{3}$

پ) $x = -1$, $x = 1$

ب) $x = 0$, $x = 1$

ت) $x = -5$, $x = 5$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{ج}$$

ج) $x = -2$, $x = 0$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 4 \quad \text{ث}$$

ج) $a = 3$

ج) $x = 4$

۵

الف) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 9} \div \frac{x+1}{x-3} = \frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)(x-3)} \times \frac{x-3}{x+1} = \frac{x+2}{x+1}$

ب) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x+2} \times \frac{x+5}{x+1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x+2} \times \frac{x+5}{x+1} = x+5$

پ) $\frac{x^2 - 9}{3x^2 - 12x} \div \frac{x+3}{x-4} = \frac{(x-3)(x+3)}{3x(x-4)} \times \frac{x-4}{x+3} = \frac{x-3}{3x}$

ت) $\frac{x^2 - x - 6}{x+1} \div \frac{x+2}{x+1} = \frac{(x-3)(x+2)}{x+1} \times \frac{x+1}{x+2} = x-3$



$$\text{ث)} \frac{a^2-36}{a+1} \div \frac{a^2-5a-6}{(a+1)^2} = \frac{(a+6)(a-6)}{a+1} \times \frac{(a+1)^2}{(a-6)(a+1)} = a+6$$

$$\text{ج)} \frac{x-1}{x^2-4x+3} \times \frac{x^2-9}{x} = \frac{x-1}{(x-1)(x-3)} \times \frac{(x-3)(x+3)}{x} = \frac{x+3}{x}$$

$$\text{ج)} \frac{x^2-x-6}{2+x} \div \frac{(x-3)^2}{2x} = \frac{(x+2)(x-3)}{2+x} \times \frac{2x}{(x-3)^2} = \frac{2x}{x-3}$$

$$\text{ج)} \frac{a^2-25}{a+2} \times \frac{a+3}{a^2+8a+15} = \frac{(a-5)(a+5)}{a+2} \times \frac{a+3}{(a+5)(a+3)} = \frac{a-5}{a+2}$$

$$\text{د)} \frac{x-3}{x^2-5x+6} = \frac{x-3}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-2}$$

$$\text{د)} \frac{ab^2}{a^2-b^2} \div \frac{fab}{a^2+ab} = \frac{ab^2}{(a-b)(a+b)} \times \frac{a(a+b)}{fab} = \frac{rab}{a-b}$$

$$\text{د)} \frac{m^2-49}{6x} \div \frac{m+7}{2x} = \frac{(m-7)(m+7)}{6x} \times \frac{2x}{m+7} = \frac{1}{3}(m-7)$$

$$\text{د)} \frac{25-x^2}{5-x} = \frac{(5-x)(5+x)}{(5-x)} = 5+x$$

$$\text{د)} \frac{a^2-5a+6}{a^2-4} = \frac{(a-2)(a-3)}{(a-2)(a+2)} = \frac{a-3}{a+2}$$

$$\text{ز)} \frac{4x^2y}{x^2+7x+10} \times \frac{x+5}{x^2} = \frac{4x^2y}{(x+2)(x+5)} \times \frac{x+5}{x^2} = \frac{4y}{x+2}$$

$$\text{س)} \frac{3x}{x(x-5)} \times \frac{x^2-7x+10}{x-2} = \frac{3}{x-5} \times \frac{(x-5)(x-2)}{x-2} = 3$$

$$\text{ش)} \frac{5-x}{x^2-5x} = \frac{5-x}{x(x-5)} = \frac{-(-5+x)}{x(x-5)} = -\frac{1}{x}$$

$$\text{ص)} \frac{x^2+2x+1}{3-x} \times \frac{x-3}{x+1} = \frac{(x+1)^2}{3-x} \times \frac{-(-x+3)}{x+1} = -(x+1)$$

$$\text{ض)} \frac{x^2-4x+4}{4x^2y-8xy} \div \frac{x^2+x-6}{6x^2+18x} = \frac{(x-2)^2}{4xy(x-2)} \times \frac{6x(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{3}{2y}$$

$$\text{الف)} \frac{3}{a-3} - \frac{2}{a+4} = \frac{3(a+4)-2(a-3)}{(a-3)(a+4)} = \frac{3a+12-2a+6}{(a-3)(a+4)} = \frac{a+18}{(a-3)(a+4)}$$

$$\text{ب)} \frac{x}{x-3} + \frac{2}{x} = \frac{x(x)+2(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x^2+2x-6}{x(x-3)}$$

$$\text{پ)} \frac{3x+1}{x+2} + \frac{x+7}{x+2} = \frac{3x+1+x+7}{x+2} = \frac{4x+8}{x+2} = \frac{4(x+2)}{x+2} = 4$$



$$ت) \frac{5+3x}{x^2-4} - \frac{3}{x-2} = \frac{5+3x}{(x+2)(x-2)} - \frac{3}{x-2} = \frac{5+3x-3(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{5+3x-3x-6}{(x+2)(x-2)} = -\frac{1}{(x+2)(x-2)}$$

$$ث) \frac{1}{a-b} - \frac{a}{a^2-b^2} = \frac{1}{a-b} - \frac{a}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b-a}{(a-b)(a+b)} = \frac{b}{(a-b)(a+b)}$$

$$ج) \frac{1}{x+2} - \frac{2x}{x^2-x-6} = \frac{1}{x+2} - \frac{2x}{(x-3)(x+2)} = \frac{x-3-2x}{(x-3)(x+2)} = \frac{-x-3}{(x-3)(x+2)}$$

$$د) \frac{x^2}{x-y} - \frac{xy}{x-y} = \frac{x^2-xy}{x-y} = \frac{x(x-y)}{x-y} = x$$

$$ه) \frac{5}{x(x+1)} - \frac{3x}{x+1} = \frac{5-3x^2}{x(x+1)}$$

$$و) \frac{10ay^2-5by}{-5y} = \frac{10ay^2}{-5y} + \frac{-5by}{-5y} = -2ay + b$$

$$ز) \frac{2x^2-16}{x^2-4} - \frac{x}{x+2} = \frac{2x^2-16}{(x-2)(x+2)} - \frac{x}{x+2} = \frac{2x^2-16-x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x^2-16-x^2+2x}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+2x-16}{(x-2)(x+2)}$$

$$ح) \frac{x^2-4x}{x+1} - \frac{5}{x+1} = \frac{x^2-4x-5}{x+1} = \frac{(x-5)(x+1)}{x+1} = x-5$$

$$ط) \frac{3}{a-b} + \frac{2}{a} = \frac{3a+2(a-b)}{(a-b)a} = \frac{3a+2a-2b}{(a-b)a} = \frac{5a-2b}{(a-b)a}$$

$$ی) \frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{y-x} = \frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{-(x-y)} = \frac{x^2}{x-y} - \frac{y^2}{x-y} = \frac{x^2-y^2}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x+y$$

$$ک) \frac{4}{x+1} + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{4}{x+1} + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{4}{x+1} + \frac{2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{4(x-1)+2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{4x-4+2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{6x-4}{(x+1)(x-1)} = \frac{2(3x-2)}{(x+1)(x-1)}$$

$$س) \frac{6x^3yz-xy^2}{-3x^2y} = \frac{6x^3yz}{-3x^2y} + \frac{-xy^2}{-3x^2y} = -2xz + \frac{y}{3x}$$

$$ش) \frac{1}{x} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{(x-2)+2}{x(x-2)} = \frac{x}{x(x-2)} = \frac{1}{x-2}$$

$$ص) \frac{7x}{5x+10} + \frac{x}{x+2} = \frac{7x}{5(x+2)} + \frac{x}{x+2} = \frac{7x+5x}{5(x+2)} = \frac{12x}{5(x+2)}$$

$$ض) \frac{2}{x} + \frac{3}{x} + \frac{4}{2x} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2+3+2}{x} = \frac{7}{x}$$

$$ط) \frac{2x}{6x^2+8x} + \frac{5}{3x+4} = \frac{2x}{2x(3x+4)} + \frac{5}{3x+4} = \frac{1}{3x+4} + \frac{5}{3x+4} = \frac{6}{3x+4}$$

$$ظ) \frac{1}{x-y} + \frac{2}{x+y} = \frac{(x+y)+2(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x+y+2x-2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{3x-y}{(x-y)(x+y)}$$



الف) توجه کنید که $x^2 - 36 = (x-6)(x+6)$

$$\frac{x-6}{2x} = \frac{x^2-36}{2x(x+6)}$$

ب)

$$\frac{4a-1}{1-4a} = \frac{4a-1}{-(-1+4a)} = -1$$



الف) $\frac{x^2y}{x^3} \times \frac{xy}{y^3} = \frac{y}{x} \times \frac{x}{y^2} = \frac{1}{y}$

ب) $\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} = \frac{x-y}{y^2}$



الف) $\left(\frac{1}{a-1} + \frac{2}{a+2}\right) \times \frac{a^2-4}{3} = \left(\frac{1}{a-1} + \frac{2}{a+2}\right) \times \frac{(a-2)(a+2)}{3} = \frac{a+2+2(a-1)}{(a-1)(a+2)} \times \frac{(a-2)(a+2)}{3}$
 $= \frac{3a}{(a-1)(a+2)} \times \frac{(a-2)(a+2)}{3} = \frac{a(a-2)}{a-1}$

ب) $\frac{14x^4y^3}{2x^3y^4} = \frac{7x^f}{y}$

الف) $3x+6=0 \Rightarrow x=-2$

ب)

ا) $\frac{2a+8}{a^2-16} = \frac{2(a+4)}{(a-4)(a+4)} = \frac{2}{a-4}$

ر) $\frac{2x-4}{x^2-4} - \frac{x+4}{x+2} = \frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{x+4}{x+2} = \frac{2}{x+2} - \frac{x+4}{x+2} = \frac{2-x-4}{x+2} = \frac{-x-2}{x+2} = \frac{-(x+2)}{x+2} = -1$



الف) $\frac{x+1}{1-x} + 1 = \frac{x+1+1-x}{1-x} = \frac{2}{1-x}$

ب) $\frac{x}{x+5} \times \frac{x^2+10x+25}{x^2} = \frac{x}{x+5} \times \frac{(x+5)^2}{x^2} = \frac{x+5}{x}$



الف) $\frac{b-3}{b^2-5b+6} \times \frac{b}{5} = \frac{b-3}{(b-2)(b-3)} \times \frac{b}{5} = \frac{b}{5(b-2)}$

ب) $\frac{x^2-49}{x+7} \times \frac{3x}{x-7} = \frac{(x-7)(x+7)}{x+7} \times \frac{3x}{x-7} = 3x$

پ) $\frac{2}{a} + \frac{5a-1}{3a} - \frac{1}{3a} = \frac{2 \times 3 + 5a - 1 - 1}{3a} = \frac{6+5a-2}{3a} = \frac{5a+4}{3a}$

الف) $\frac{x-2}{x+7} = \frac{x}{x+7} - \frac{2}{x+7}$

ب) $\frac{x^2+3}{2x} + \frac{2x-3}{2x} = \frac{x^2+3+2x-3}{2x} = \frac{x^2+2x}{2x} = \frac{x(x+2)}{2x} = \frac{x+2}{2}$

۱۴ تقسیم‌های زیر را انجام داده و خارج قسمت و باقی‌مانده تقسیم را به دست آورید.

الف)
$$\begin{array}{r} x^2 - x + 5 \\ x^2 - 2x \\ \hline x + 5 \\ - x - 2 \\ \hline 7 \end{array}$$

ب)
$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2x + 1 \\ 3x^2 - 3x \\ \hline x + 1 \\ - x - 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

پ)
$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 5 \\ 2x^2 - 3x \\ \hline -6x + 5 \\ - -6x + 9 \\ \hline -4 \end{array}$$

ت)
$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + 5 \\ x^2 - x \\ \hline -3x + 5 \\ - -3x + 3 \\ \hline 2 \end{array}$$

ث)
$$\begin{array}{r} 6x^2 + x - 7 \\ 6x^2 - 3x \\ \hline 4x - 7 \\ - 4x - 2 \\ \hline -5 \end{array}$$

ج)
$$\begin{array}{r} -x^2 + 8x - 12 \\ -x^2 - 3x \\ \hline 11x - 12 \\ - 11x + 33 \\ \hline -45 \end{array}$$

د)
$$\begin{array}{r} 3x^2 - 10x - 24 \\ 3x^2 - 4x \\ \hline -6x - 24 \\ - -6x + 8 \\ \hline -32 \end{array}$$

ه)
$$\begin{array}{r} x^2 + x + 5 \\ x^2 + x^2 \\ \hline -x^2 + x + 5 \\ - -x^2 - x \\ \hline 2x + 5 \\ - 2x + 2 \\ \hline 3 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 2x^3 - 2x^2 + 3x + 2 \\ 2x^3 - 2x^2 \\ \hline 3x + 2 \\ - 3x - 3 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} x-1 \\ 2x^2+3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x^3 - 1 \\ -6x^3 + 18x \\ \hline -18x - 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2+3 \\ 6x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3x^4 + 2x^2 + 1 \\ -3x^4 - 3x^2 \\ \hline 5x^2 + 1 \\ - 5x^2 + 5 \\ \hline -4 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2+1 \\ -3x^2+5 \end{array}$$

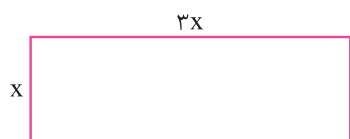
$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^2 - 10 \\ x^4 - 5x^2 \\ \hline 2x^2 - 10 \\ - 2x^2 - 10 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2-5 \\ x^2+2 \end{array}$$

۱۵

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 5x - m \\ 4x^2 - 4x \\ \hline -x - m \\ - -x + 1 \\ \hline -m - 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x-1 \\ 4x-1 \end{array}$$

برای اینکه عبارت $4x^2 - 5x - m$ بر $x-1$ بخش پذیر باشد، باید $-m-1=0$. بنابراین $m=-1$.

۱۶ فرض کنید x اندازه عرض مستطیل باشد. پس طول آن برابر $3x$ است.



محیط مستطیل $= 2(3x + x) = 8x$ ، مساحت مستطیل $= 3x \times x = 3x^2$

$$\frac{\text{محیط مستطیل}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{8x}{3x^2} = \frac{8}{3x}$$

۱۷

$$\frac{\text{مساحت مستطیل بزرگ}}{\text{مساحت مستطیل کوچک}} = \frac{a \times (a-b)}{b \times (a-b)} = \frac{a}{b}$$

فصل هشتم

حجم و مساحت





درس اول: حجم و مساحت کره



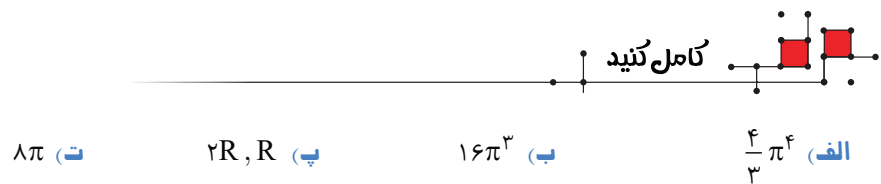
درست یا نادرست

(ت) نادرست

(پ) نادرست

(ب) نادرست

(الف) درست



(ت) 8π

(پ) $2R, R$

(ب) $16\pi^3$

(الف) $\frac{4}{3}\pi^4$

پرسش‌های دو گزینه‌ای

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi(2R)^2}{\frac{4}{3}\pi R^2} = \frac{4R^2}{R^2} = 4$$

(پ) گزینه (۲)

(ب) گزینه (۲)

(الف) گزینه (۱)

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi(\frac{R}{2})^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\frac{R^3}{8}}{R^3} = \frac{1}{8}$$

(ت) گزینه (۲)

تمرین‌های تشریحی

(۱) چون قطر کره برابر ۶۰ cm است، پس شعاع آن ۳۰ cm است، در نتیجه

$$\text{حجم} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (30)^3 = 36000\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{مساحت} = 4\pi R^2 = 4\pi (30)^2 = 3600\pi \text{ cm}^2$$

(۲)

مساحت موردنظر برابر است با مساحت نیم کره‌ای به شعاع ۷ cm به علاوه مساحت دایره‌ای به شعاع ۷ cm که می‌شود

$$2\pi(7)^2 + \pi(7)^2 = 3\pi \times 7^2 = 147\pi \text{ cm}^2$$

(۳)

مساحت کل برابر است با مجموع مساحت رویه نیم کره و مساحت دایره‌ای که نیم کره روی آن ایستاده است. پس

$$\text{مساحت کل} = 4\pi(12)^2 + \pi(12)^2 = 720\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{میزان رنگ مورد نیاز} = 720 \times 0.5 = 360 \text{ gr}$$

$$4\pi R^2 = 33\pi \Rightarrow R^2 = \frac{33}{4} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{33}}{2} \text{ cm}$$

(۴) فرض می‌کنیم شعاع این کره R باشد. در این صورت

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{33\sqrt{33}}{8} = \frac{11\sqrt{33}}{2}\pi \text{ cm}^3$$

بنابراین حجم کره موردنظر برابر می‌شود با

(۵)

اگر شعاع کره‌های S_1 و S_2 را به ترتیب R_1 و R_2 فرض کنیم، از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$\frac{S_1 \text{ حجم}}{S_2 \text{ حجم}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{S_1 \text{ مساحت}}{S_2 \text{ مساحت}} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

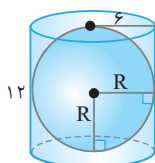
بنابراین

(۶) شعاع کره S_1 را برابر با R_1 و شعاع کره S_2 را برابر با R_2 فرض می‌کنیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{S_1 \text{ مساحت}}{S_2 \text{ مساحت}} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{S_1 \text{ حجم}}{S_2 \text{ حجم}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{27} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

بنابراین نسبت حجم این دو کره به دست می‌آید



(۷) توجه کنید که قطر کره برابر است با قطر قاعده استوانه و ارتفاع آن، پس قطر کره برابر است با ۱۲ cm.

بنابراین مساحت کره برابر است با

$$4\pi R^2 = 4 \times 6^2 \pi = 144\pi \text{ cm}^2$$

(۸) فرض کنید R شعاع کره محاط شده باشد. در این صورت ارتفاع ۲R و شعاع قاعده استوانه محیط شده بر کره است.

$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \frac{16\pi}{3} \Rightarrow \pi R^2(2R) - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{16\pi}{3}$$

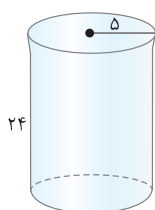
بنابراین

$$\Rightarrow 2R^3 - \frac{4}{3}R^3 = \frac{16}{3} \Rightarrow 6R^3 - 4R^3 = 16 \Rightarrow 2R^3 = 16 \Rightarrow R^3 = 8 \Rightarrow R = 2$$

در نتیجه ارتفاع استوانه برابر است با $2R = 2 \times 2 = 4$

(۹) فرض کنید R شعاع نیم کره باشد. پس

$$V_{\text{نیم کره}} = V_{\text{استوانه}} \Rightarrow \frac{2}{3}\pi R^3 = \pi \times (3)^2 \times 9 \Rightarrow \frac{2}{3}R^3 = 81 \Rightarrow R^3 = \frac{243}{2} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{243}{2}} = \sqrt[3]{\frac{27 \times 9}{2}} = 3\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$



$$V = \pi R^2 h = 5^2 \times 24 \pi = 600\pi \text{ cm}^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4}{3}\pi \text{ cm}^3$$

$$\frac{600\pi}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{3 \times 600}{4} = 450$$

(۱۰) ابتدا توجه کنید که حجم استوانه برابر است با

اکنون حجم توپ کروی را به دست می‌آوریم:

بنابراین تعداد توپ‌های کروی برابر است با



(۱۱) الف) توجه کنید که قطر نیم کره برابر ۱۴ cm است، پس شعاع آن ۷ cm است. بنابراین ارتفاع استوانه برابر است با ۶ cm = ۱۳ - ۷. اکنون توجه کنید که حجم سطل برابر است با حجم نیم کره، به علاوه حجم استوانه که می شود:

$$\frac{2}{3}\pi(7)^3 + \pi(7)^2(6) = \frac{1568\pi}{3} = 1568\text{cm}^3$$

ب) برای به دست آوردن مساحت سطل به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\begin{aligned} 2\pi(7)^2 + \pi(7)^2 + 2\pi(7) \times 6 \\ = 98\pi + 49\pi + 84\pi = 231\pi = 231 \times 3 = 693\text{cm}^2 \end{aligned}$$

بنابراین مساحت سطل برابر است با ۶۹۳ m^۲ و مقدار رنگ مورد نیاز برابر است با ۰/۰۶۹۳ × ۱۲ = ۰/۸۳۱۶ g

(۱۲) مقدار مسی که پس از ذوب کردن کره به دست می آید برابر با حجم کره‌ای به شعاع ۶ cm است که می شود

$$\frac{4}{3}\pi(6)^3 = 288\pi\text{cm}^3$$

اگر با این مقدار مس سیمی به قطر ۲ cm درست کنیم، در حقیقت استوانه‌ای به حجم ۲۸۸π cm^۳ و شعاع قاعده ۱ cm به دست آورده‌ایم. اگر ارتفاع این استوانه (یعنی طول سیم) برابر x باشد، آن گاه

$$288\pi = \pi(1)^2 \times x \Rightarrow x = 288\text{ cm} \Rightarrow x = 288\text{m}$$

(۱۳) فرض کنید شعاع کره اولیه R باشد. در این صورت شعاع کره جدید ۲R است و

$$\text{حجم کره جدید} = \frac{4}{3}\pi(2R)^3 = \frac{32}{3}\pi R^3$$

بنابراین

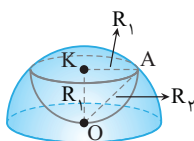
$$\text{حجم کره اولیه} - \text{حجم کره جدید} = \frac{32}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{28}{3}\pi R^3 = 7\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

بنابراین، حجم افزایش یافته، هفت برابر حجم کره اولیه است. یعنی حجم کره ۷۰۰٪ افزایش یافته است.

(۱۴) فرض کنید شعاع نیم کره کوچک‌تر برابر R_۱ و شعاع نیم کره بزرگ‌تر برابر R_۲ باشد (شکل زیر را ببینید). در این صورت

$$R_2^2 = R_1^2 + R_1^2 = 2R_1^2 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \sqrt{2}$$

بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث OKA.



$$\frac{\text{حجم نیم کره بزرگ‌تر}}{\text{حجم نیم کره کوچک‌تر}} = \frac{\frac{2}{3}\pi R_2^3}{\frac{2}{3}\pi R_1^3} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 = 2\sqrt{2}$$

بنابراین

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱) گزینه (۲)

توجه کنید که قطر کره برابر است با طول یال مکعب، پس حجم کره برابر می شود با

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}(3)^3\pi = 36\pi\text{cm}^3$$

۲) گزینه (۴)

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow OB = 5\text{cm}$$

بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث OHB.

$$\text{بنابراین حجم کره برابر است با } \frac{4}{3}\pi(5)^3 = \frac{500\pi}{3}\text{cm}^3$$

گزینه (۱) ۳

شعاع کره S_1 را برابر R_1 و شعاع کره S_2 را برابر R_2 فرض می‌کنیم. به دست می‌آید

$$\frac{S_1 \text{ حجم}}{S_2 \text{ حجم}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{S_1 \text{ مساحت}}{S_2 \text{ مساحت}} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

بنابراین نسبت مساحت دو کره به این صورت است

گزینه (۴) ۴

فرض می‌کنیم شعاع کره اولیه R باشد. در این صورت شعاع کره جدید $2R$ است و

$$\text{مساحت کره جدید} = 4\pi(2R)^2 = 16\pi R^2$$

$$\text{بنابراین} \quad \text{مساحت افزایش یافته سه برابر مساحت کره اولیه است. یعنی، مساحت کره} \quad 16\pi R^2 - 4\pi R^2 = 12\pi R^2 = 3(4\pi R^2)$$

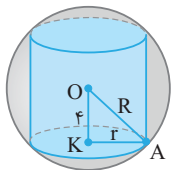
بنابراین، مساحت افزایش یافته سه برابر مساحت کره اولیه است. یعنی، مساحت کره ۳۰۰٪ افزایش یافته است.

گزینه (۲) ۵

فرض کنید شعاع کره برابر R و شعاع قاعده استوانه برابر r باشد (شکل زیر را ببینید). چون ارتفاع استوانه برابر ۸ است، پس

$$R^2 = 16 + r^2 \quad (۱) \quad OK = 4. \text{ بنابراین، از قضیه فیثاغورس در مثلث OKA نتیجه می‌شود}$$

از طرف دیگر طبق فرض $\frac{r}{R} = \frac{3}{5}$ ، پس $r = \frac{3}{5}R$. اکنون از تساوی (۱) نتیجه می‌شود



$$R^2 = 16 + \frac{9}{25}R^2 \Rightarrow R^2 - \frac{9}{25}R^2 = 16$$

$$\frac{16R^2}{25} = 16 \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5$$

بنابراین حجم کره برابر است با $\frac{4}{3}\pi(5)^3 = \frac{500\pi}{3}$

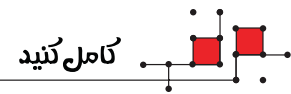


درس دوم: حجم هرم و مخروط



درست یا نادرست

الف) نادرست ب) درست پ) نادرست ت) درست



الف) ارتفاع ب) منتظم - هم‌نهشت پ) همین مرکز تقارن ت) دایره - مرکز دایره

پرسش‌های دو گزینه‌ای

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{2} S \times (2h)}{\frac{1}{3} S \times (h)} = \frac{2h}{h} = 2 \quad \text{الف) گزینه (۱)}$$

$$V = S \Rightarrow \frac{1}{3} Sh = S \Rightarrow \frac{1}{3} h = 1 \Rightarrow h = 3 \quad \text{ب) گزینه (۲)}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 h}{\frac{1}{3} \pi R^2 h} = \frac{\frac{R^2}{4}}{R^2} = \frac{1}{4} \quad \text{پ) گزینه (۲)}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \times \left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{3} \pi \quad \text{ت) گزینه (۱)}$$

تمرین‌های تشریحی

$$300 = \frac{1}{3} S \times 12 \Rightarrow S = 75 \text{ cm}^2$$

۱) اگر مساحت قاعده این هرم برابر S باشد، آن‌گاه

۲) فرض می‌کنیم طول یال مکعب برابر a باشد. در این صورت، چون حجم مکعب 48 cm^3 است، پس $a^3 = 48$. از طرف

دیگر، مساحت قاعده هرم OABCD برابر است با a^2 و ارتفاع آن برابر است با a. بنابراین حجم آن برابر است با

$$\frac{1}{3} (a^2)(a) = \frac{1}{3} a^3 = 16 \text{ cm}^3.$$

۳) فرض می‌کنیم طول ضلع مربع ABCD برابر a باشد. در این صورت، چون $OH = a$ ،

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} a^2 \times a = \frac{1}{3} a^3 = 9 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$$

بنابراین مساحت مربع ABCD برابر ۹ است.

(۴) بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABC، $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = 10 \text{ cm}$

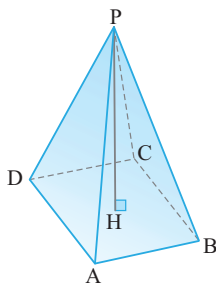
بنابراین $OA = BC = 10 \text{ cm}$. از طرف دیگر، مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24 \text{ cm}^2$. در نتیجه حجم هرم

OABC برابر است با $\frac{1}{3} (24)(10) = 80 \text{ cm}^3$

(۵) ابتدا مساحت مثلث ABC را به دست می آوریم. بنابراین در مثلث ABC از رأس A ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می کنیم و محل برخورد با ضلع BC را H می نامیم. چون مثلث ABC متساوی الساقین است، نقطه H وسط ضلع BC است. اکنون با توجه به رابطه فیثاغورس،

$$S_{ABC} = \frac{12 \times 8}{2} = 48$$

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times OA = \frac{1}{3} \times 48 \times 6 = 96$$



(۶) توجه کنید که طول ضلع قاعده برابر ۸ است. در این صورت، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث DBC، $DB^2 = 8^2 + 8^2 = 2 \times 8^2$ پس $DB = 8\sqrt{2}$. بنابراین $HB = \frac{DB}{2} = 4\sqrt{2}$. اکنون

توجه کنید که باز هم بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث PHB،

$$PB^2 = PH^2 + HB^2 \Rightarrow (2\sqrt{17})^2 = PH^2 + (4\sqrt{2})^2$$

$$PH^2 = 36 \Rightarrow PH = 6$$

بنابراین حجم هرم موردنظر برابر است با $\frac{1}{3} (64)(6) = 128$.

(۷) ابتدا توجه کنید که $BC = AD = 12 \text{ cm}$. در نتیجه، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث OBC،

$$OC^2 = OB^2 + BC^2 \Rightarrow 13^2 = OB^2 + 12^2 \Rightarrow OB = 5 \text{ cm}$$

بنابراین حجم هرم OABCD برابر است با $\frac{1}{3} (12 \times 3)(5) = 60 \text{ cm}^3$

(۸) بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه OBC، $OC^2 = OB^2 + BC^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + BC^2 \Rightarrow BC = 4 \text{ cm}$

بنابراین مساحت مستطیل ABCD برابر است با $6 \times 4 = 24 \text{ cm}^2$ و حجم هرم OABCD برابر است با $\frac{1}{3} (24)(3) = 24 \text{ cm}^3$

(۹) فرض می کنیم شعاع کره برابر R باشد. در این صورت $\frac{1}{3} \pi (50)^2 \times 25 = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow R^3 = 25^3 \Rightarrow R = 25 \text{ cm}$

بنابراین مساحت کره برابر است با $4\pi (25)^2 = 2500\pi \text{ cm}^2$

(۱۰) فرض می کنیم شعاع قاعده مخروط و استوانه برابر R باشد. اگر ارتفاع مخروط برابر h باشد، آنگاه

$$\frac{1}{3} \pi R^2 h = \pi R^2 \times 5 \Rightarrow h = 15 \text{ cm}$$

(۱۱) توجه کنید که حجم مخروط موردنظر و کره برابر است. در نتیجه اگر شعاع قاعده مخروط برابر R باشد، آنگاه

$$\frac{1}{3} \pi R^2 \times 3 = \frac{4}{3} \pi (3)^3 \Rightarrow R^2 = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow R = 6 \text{ cm}$$

(۱۲) شعاع قاعده و ارتفاع مخروط برابر ۶ cm است. بنابراین حجم آن برابر است با $\frac{1}{3} \pi (6)^2 (6) = 72\pi \text{ cm}^3$. حجم نیم کره برابر

است با $\frac{2}{3} \pi \times 6^3 = 144\pi \text{ cm}^3$. بنابراین حجم ناحیه بین نیم کره و مخروط برابر است با $144\pi - 72\pi = 72\pi \text{ cm}^3$.



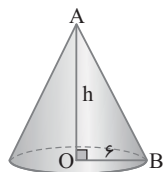
(۱۳) شعاع نیم کره برابر $1/5 \text{ cm}$ است. بنابراین ارتفاع استوانه برابر است با $6 \text{ cm} = 3 - 1/5 - 10/5$. به این ترتیب، حجم شکل

$$\frac{2}{3} \pi (1/5)^3 + \pi (1/5)^2 (6) + \frac{1}{3} \pi (1/5)^2 (3) = 18 \pi \text{ cm}^3$$

موردنظر برابر است با

(۱۴) ابتدا ارتفاع مخروط را به دست می آوریم. از رابطه حجم به دست می آید:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h \Rightarrow 144 \pi = \frac{1}{3} \pi (6)^2 \times h \Rightarrow h = 12 \text{ cm}$$



اکنون با توجه به شکل زیر، برای محاسبه طول پاره خط AB از قضیه فیثاغورس در مثلث OAB استفاده

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow AB^2 = 12^2 + 6^2 = 144 + 36 = 180$$

$$AB = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \text{ cm}$$

می کنیم:

(۱۵) چون شعاع نیم کره برابر $3/5 \text{ cm}$ است، پس ارتفاع مخروط برابر است با $5 \text{ cm} = 8/5 - 3/5$. بنابراین حجم جسم شماره

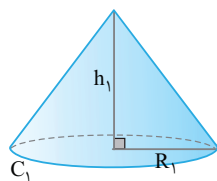
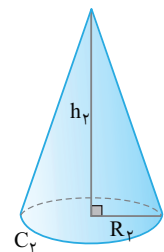
$$\frac{1}{3} \pi (3/5)^2 (5) + \frac{2}{3} \pi (3/5)^3 = 49 \pi \text{ cm}^3$$

(۱) برابر است با

از طرف دیگر حجم استوانه برابر است با $245 \pi \text{ cm}^3 = \pi \times 5^2 \times 9/8$. بنابراین حجم آبی که درون استوانه می ماند برابر است با

$$245 \pi - 49 \pi = 196 \pi \text{ cm}^3$$

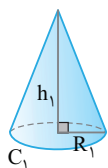
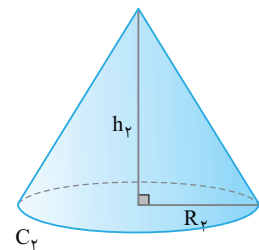
(۱۶) مطابق شکل های زیر، اجزای دو مخروط را نامگذاری می کنیم، در این صورت



$$\begin{cases} \frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{3} \\ \frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \pi R_1^2 h_1}{\frac{1}{3} \pi R_2^2 h_2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \times \left(\frac{h_1}{h_2}\right)$$

$$\frac{4}{3} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{2}$$

(۱۷) از نمادگذاری شکل های زیر استفاده می کنیم. بنابراین نتیجه می شود



$$\begin{cases} \frac{h_1}{h_2} = \frac{5}{8} \\ \frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{\text{حجم } C_1}{\text{حجم } C_2} = \frac{\frac{1}{3} \pi R_1^2 h_1}{\frac{1}{3} \pi R_2^2 h_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \times \left(\frac{h_1}{h_2}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{5}{8} = \frac{1}{10}$$

(۱۸) فرض می کنیم شعاع قاعده و ارتفاع مخروط به ترتیب R و h باشند. در این صورت $\frac{R}{h} = \frac{5}{4}$ ، پس $h = \frac{4}{5} R$. از طرف دیگر

$$21 \frac{4}{5} = \frac{1}{3} \pi R^2 h \Rightarrow \frac{108}{5} = \frac{1}{3} \times 3 \times R^2 \times \frac{4}{5} R$$

$$27 = R^3 \Rightarrow R = 3$$

(۱۹) اگر ارتفاع و شعاع قاعده مخروط اولیه به ترتیب h و R باشند، ارتفاع و شعاع قاعده مخروط جدید به ترتیب 2h و 2R هستند. بنابراین

$$\frac{\text{حجم مخروط جدید}}{\text{حجم مخروط اولیه}} = \frac{\frac{1}{3} \pi (2R)^2 (2h)}{\frac{1}{3} \pi R^2 h} = \frac{4R^2 \times 2h}{R^2 h} = 8$$

بنابراین حجم مخروط جدید هشت برابر حجم مخروط اولیه می شود.

$$\text{حجم مخروط ناقص} = V_{\text{مخروط بزرگ}} - V_{\text{مخروط کوچک}} = \frac{1}{3} \pi (3)^2 \times 4/5 - \frac{1}{3} \pi (1)^2 (1/5) = \frac{1}{3} \pi (39) = 13 \pi$$

(۲۰)

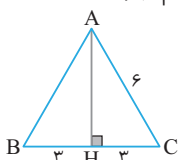


۱. گزینه (۳)

توجه کنید که مساحت مثلث ABC برابر با نصف مساحت مربعی به طول ضلع ۶cm است که می‌شود $\frac{1}{2} \times 6^2 = 18 \text{ cm}^2$
از طرف دیگر، $OA = 6 \text{ cm}$ ، پس حجم هرم OABC برابر است با $\frac{1}{3} (18)(6) = 36 \text{ cm}^3$

۲. گزینه (۱)

فرض کنید قاعده هرم، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد (شکل زیر را ببینید). ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. چون AH میانه هم هست، پس $HC = 3$. در نتیجه، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه AHC،



$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow 6^2 = AH^2 + 3^2 \Rightarrow AH = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{1}{2} (3\sqrt{3})(6) = 9\sqrt{3}$ به این ترتیب، حجم هرم برابر

$$\text{است با } \frac{1}{3} (9\sqrt{3})(6) = 18\sqrt{3}$$

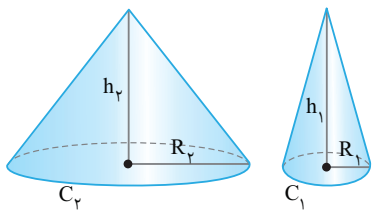
۳. گزینه (۱)

توجه کنید که شعاع قاعده مخروط هم برابر ۳cm است. بنابراین حجم شکل موردنظر برابر است با

$$\frac{1}{3} \pi (3)^2 (6) + \pi (3)^2 (5) = 63\pi \text{ cm}^3$$

۴. گزینه (۳)

مانند شکل‌های زیر، شعاع قاعده مخروط C_1 را R_1 و شعاع قاعده مخروط

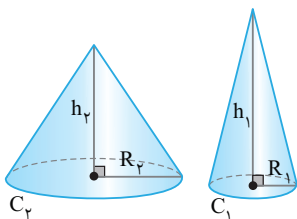


C_2 را R_2 فرض می‌کنیم. در این صورت

$$\begin{cases} h_1 = h_2 \\ \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \pi R_1^2 h_1}{\frac{1}{3} \pi R_2^2 h_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

۵. گزینه (۴)

مطابق شکل اجزای دو مخروط را نامگذاری می‌کنیم. در این صورت



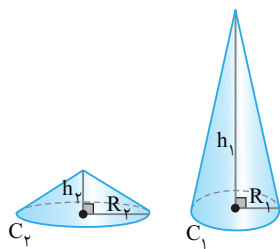
$$\begin{cases} \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3} \\ \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \pi R_1^2 h_1}{\frac{1}{3} \pi R_2^2 h_2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \times \left(\frac{h_1}{h_2}\right)$$

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{h_1}{h_2}\right) \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{4}{3}$$



گزینه (۳) ۶

با توجه به شکل‌های زیر، نتیجه می‌شود



$$\begin{cases} \frac{V_1}{V_2} = 2 \\ \frac{h_1}{h_2} = \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \times \left(\frac{h_1}{h_2}\right)$$

$$2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \times \frac{9}{2} \Rightarrow \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{3}$$

گزینه (۴) ۷

فرض کنید شعاع نیم‌کره و شعاع قاعده مخروط برابر R باشد. در این صورت، بنابر قضیه فیثاغورس، $\Delta^2 = 4^2 + R^2$ ، در

نتیجه $R = 3\text{cm}$. بنابراین حجم شکل موردنظر برابر است با $\frac{1}{3}\pi(3)^2 \times 4 + \frac{2}{3}\pi(3)^3 = 30\pi\text{cm}^3$

درس سوم: سطح و حجم

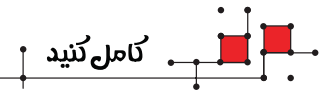


درست یا نادرست  

(پ) درست

(ب) نادرست

(الف) نادرست



(پ) محیط قاعده مخروط (ت) کره

(ب) وجه‌های

(الف) قاعده - وجه‌های

پرسش‌های دو گزینه‌ای

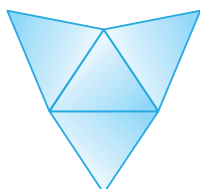
$$\begin{cases} \text{BC حول } V_1 = \pi \times 4 \times 3 = 12\pi \\ \text{AB حول } V_2 = \pi \times 9 \times 2 = 18\pi \end{cases} \Rightarrow V_1 < V_2 \quad \text{(الف) گزینه (۱)}$$

$$\begin{cases} \text{AB حول } V_1 = \frac{1}{3} \pi \times 4 \times 3 = 4\pi \\ \text{AC حول } V_2 = \frac{1}{3} \pi \times 9 \times 2 = 6\pi \end{cases} \Rightarrow V_2 < V_1 \quad \text{(ب) گزینه (۲)}$$

$$V_{\text{نیم کره}} = \frac{2}{3} \pi \times 27 = 18\pi \quad \text{(پ) گزینه (۱)}$$

تمرین‌های تشریحی

(۱) گسترده این هرم از چهار مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a درست شده است. ابتدا مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a را حساب می‌کنیم. یکی از ارتفاع‌های این مثلث را رسم می‌کنیم (شکل زیر را ببینید). چون این ارتفاع، میانه هم هست، پس $HC = \frac{a}{2}$. اکنون توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث AHC .

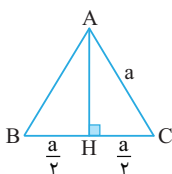


$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow a^2 = AH^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

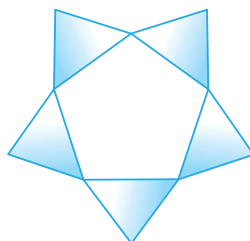
بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}a}{2} \times a = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. در نتیجه، مساحت کل هرم

$$\text{موردنظر برابر است با } 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\right) = \sqrt{3}a^2$$





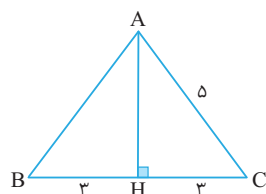
۲ گسترده هرم به صورت زیر است.



مساحت جانبی این هرم برابر است با پنج برابر مساحت مثلثی متساوی الساقین به قاعده ۶cm و طول ساق ۵cm. مساحت چنین مثلثی را حساب می کنیم (شکل زیر را ببینید). ارتفاع AH را رسم می کنیم. چون این ارتفاع، میانه نیز است، پس $HC = 3\text{cm}$. در نتیجه، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث AHC،

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow 5^2 = AH^2 + 3^2 \Rightarrow AH = 4\text{cm}$$

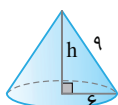
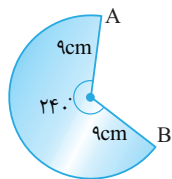
بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12\text{cm}^2$. در نتیجه، مساحت جانبی



$$5 \times 12 = 60\text{cm}^2$$

هرم موردنظر برابر است با

۳ طول کمان AB برابر است با $36\text{cm} = \frac{240^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \times 9$. بنابراین محیط قاعده مخروط برابر ۳۶cm است. فرض کنید شعاع

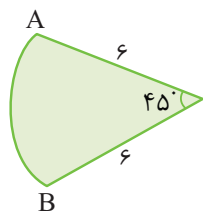


این قاعده برابر R باشد. در این صورت $2\pi R = 36$. پس $R = 6\text{cm}$. اکنون توجه کنید که اگر ارتفاع مخروط برابر h باشد، آنگاه بنابر قضیه فیثاغورس

$$9^2 = h^2 + 6^2 \Rightarrow h = 3\sqrt{5}\text{cm}$$

بنابراین حجم مخروط موردنظر برابر است با

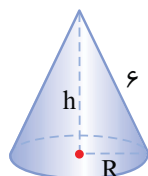
$$\frac{1}{3} \pi (6)^2 (3\sqrt{5}) = 36\sqrt{5}\pi\text{cm}^3 = 108\sqrt{5}\pi\text{cm}^3$$



$$\text{طول کمان AB} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \times 6 = \frac{9}{2}$$

$$2\pi R = \frac{9}{2} \Rightarrow R = \frac{3}{4}$$

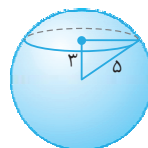
اگر شعاع قاعده مخروط باشد در این صورت



اکنون اگر h ارتفاع مخروط باشد با توجه به رابطه فیثاغورس داریم:

$$6^2 = h^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 36 - \frac{9}{16} = \frac{567}{16} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{567}}{4}$$

$$V = \frac{1}{3} \times 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{\sqrt{567}}{4} = \frac{9\sqrt{567}}{64}$$



۵ الف) دایره

ب) شعاع دایره برابر است با $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. بنابراین مساحت آن برابر است با 16π .



نمای روبه رو



نمای چپ



نمای روبه رو



نمای چپ



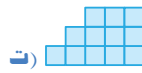
نمای روبه رو



نمای چپ



نمای بالا



نمای روبه رو



نمای چپ

(۷) الف) استوانه‌ای که دو مخروط با همان قاعده به دو طرف آن چسبیده است.

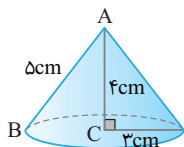
ب) مخروطی که یک مخروط کوچک‌تر با همان قاعده از آن جدا شده است.

پ) مخروط

ت) استوانه‌ای که یک مخروط با همان ارتفاع و قاعده استوانه از آن جدا شده است.

(۸) جسم حاصل مخروطی به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴ است. بنابراین حجم آن برابر است با

$$\frac{1}{3} \pi (3)^2 (4) = 12\pi \text{ cm}^3$$



(۹) جسم حاصل نیم کره‌ای به شعاع ۳ cm است که مخروطی به شعاع قاعده ۳ cm و ارتفاع ۳ cm از آن جدا شده است. بنابراین

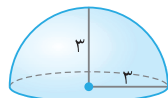
$$\frac{2}{3} \pi (3)^3 - \frac{1}{3} \pi (3)^2 (3) = 9\pi \text{ cm}^3$$

حجم آن برابر است با

(۱۰) جسم حاصل نیم کره‌ای به شعاع ۴ است که مخروطی به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴ از آن جدا شده است. بنابراین حجم این

$$\frac{2}{3} \pi \times 4^3 - \frac{\pi \times 3^2 \times 4}{3} = \frac{92\pi}{3}$$

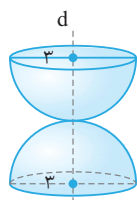
جسم برابر است با



(۱۱) جسم حاصل یک نیم کره به شعاع ۳ است که روی سطحی دایره‌ای به شعاع ۳ قرار دارد. بنابراین

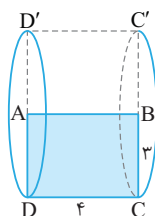
مساحت کل این جسم برابر است با

$$2\pi \times 3^2 + \pi \times 3^2 = 27\pi$$



(۱۲) جسم حاصل از دو نیم کره هر یک به شعاع ۳ درست شده است. بنابراین حجم آن برابر است با

$$2 \times \left(\frac{2}{3} \pi \times 3^3 \right) = 36\pi$$

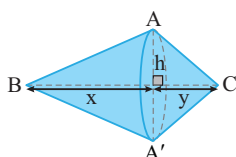


(۱۳) جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴ است. بنابراین حجم آن برابر است با

$$\pi \times 3^2 \times 4 = 36\pi$$

(۱۴) جسم حاصل از دو مخروط به هم چسبیده درست شده است. شعاع قاعده هر دو مخروط برابر ارتفاع وارد بر ضلع BC در

مثلث ABC است. با توجه به شکل اگر ارتفاع‌های این دو مخروط برابر x و y باشد، آن گاه $x + y = BC = 6$. اکنون توجه



$$S_{ABC} = 12 \Rightarrow \frac{1}{2} h \times BC = 12 \Rightarrow \frac{1}{2} h \times 6 = 12 \Rightarrow h = 4$$

کنید که

$$\frac{\pi h^2 x}{3} + \frac{\pi h^2 y}{3} = \frac{\pi h^2}{3} (x + y) = \frac{\pi \times 4^2 \times 6}{3} = 32\pi$$

بنابراین حجم موردنظر برابر است با

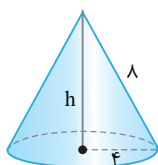


پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. گزینه (۲)

۲. گزینه (۳)

۳. گزینه (۴)



شعاع این نیم‌دایره برابر ۸ cm است، پس محیط آن برابر است با $8\pi = 24\text{ cm}$. بنابراین محیط قاعده هرم نیز برابر ۲۴ cm است. اگر شعاع این قاعده برابر R باشد، آن‌گاه $2\pi R = 24$ ، پس $R = 4\text{ cm}$. اگر ارتفاع مخروط برابر h باشد، از قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود

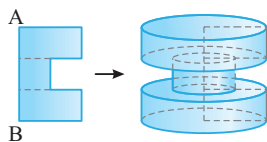
$$8^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow h = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\text{ cm}$$

$$\frac{1}{3} \pi (4)^2 (4\sqrt{3}) = 64\sqrt{3}\text{ cm}^3$$

بنابراین حجم مخروط موردنظر برابر است با

۴. گزینه (۱)

۵. گزینه (۴)

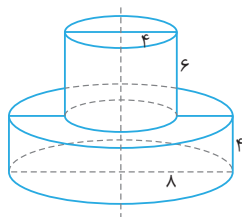


با رسم خط‌چین‌ها، شکل به سه مستطیل تقسیم می‌شود. از دوران هر مستطیل حول AB یک استوانه به‌وجود می‌آید، پس شکل حاصل به‌صورت زیر است:

۶. گزینه (۳)

از دوران هر نیم‌دایره حول خط d یک کره ایجاد می‌شود. پس شکل ایجاد شده فضای بین دو کره است.

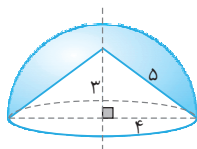
۷. گزینه (۴)



جسم موردنظر از دو استوانه درست شده است. یکی به شعاع قاعده ۸ و ارتفاع ۴ و دیگری به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۶. بنابراین حجم موردنظر برابر است با

$$\pi \times 8^2 \times 4 + \pi \times 4^2 \times 6 = 352\pi.$$

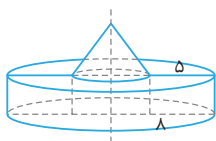
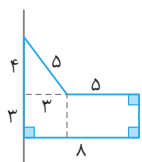
۸. گزینه (۲)



جسم حاصل نیم‌کره‌ای به شعاع ۴ است که مخروطی به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳ از آن جدا شده است.

$$\frac{2}{3} \pi \times 4^3 - \frac{\pi \times 4^2 \times 3}{3} = \frac{80\pi}{3}$$

۹. گزینه (۳)



شکل موردنظر از یک استوانه به شعاع قاعده ۸ و ارتفاع ۳ و از یک مخروط به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴ درست شده است. بنابراین حجم موردنظر

$$\pi \times 8^2 \times 3 + \frac{\pi \times 3^2 \times 4}{3} = 204\pi$$

برابر است با

۱۰. گزینه (۲)

جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۵ است که مخروطی به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳ از آن جدا شده است.

$$\pi \times 4^2 \times 5 - \frac{\pi \times 4^2 \times 3}{3} = 64\pi$$

بنابراین حجم حاصل برابر است با

امتحان نهایی فصل هشتم

الف) نادرست	ب) نادرست	پ) نادرست	ت) درست
ث) نادرست	ج) درست	چ) درست	ح) نادرست
ز) نادرست	ذ) نادرست	ذ) درست	ز) درست

الف) نیم کره	ب) دو برابر	پ) $\frac{2}{3}\pi R^3$	ت) مخروط
ث) قطر	ج) دایره	چ) کره	ح) هرم
ز) ارتفاع	ذ) ارتفاع	ذ) $6a^2$	ز) مخروط
ص) چهار	ذ) ۵	س) $\frac{1}{3}Sh$	ش) مساحت

الف) گزینه (۲)	ب) گزینه (۳)	پ) $15 = \frac{6}{4} =$ مساحت هر وجه	گزینه (۲)
----------------	--------------	--------------------------------------	-----------

$$\frac{V_{\text{استوانه}}}{V_{\text{کره}}} = \frac{\pi \times R^2 \times 2R}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{2} \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$V_{\text{کره}} = S_{\text{کره}} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 \Rightarrow \frac{1}{3}R = 1 \Rightarrow R = 3 \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi (1)^3 = \frac{4}{3}\pi \quad \text{گزینه (۳)}$$

$$V_{\text{مکعب}} = (1)^3 = 1, \quad V_{\text{استوانه}} = \pi(1)^2(1) = \pi \quad \text{نیم کره به شعاع دو سنگین تر است.}$$

۴ دایره. در صورتی که صفحه از مرکز کره بگذرد، سطح بریده شده بیشترین مساحت را دارد.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{2\pi(2R)^2}{2\pi R^2} = \frac{4R^2}{R^2} = 4 \quad \text{الف) فرض کنید } R \text{ شعاع کره باشد.}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3 \quad \text{ب)}$$

$$S = 2\pi R^2 \Rightarrow S = 2 \times 3 \times (10)^2 = 600 \text{ cm}^2 \quad \text{۶}$$

$$S = 4\pi R^2 \Rightarrow 100\pi = 4\pi R^2 \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5 \quad \text{۷}$$

$$2\pi \times (2)^2 + \pi(2)^2 = \text{مساحت دایره‌ای که نیم کره روی آن ایستاده} + \text{مساحت رویه نیم کره} = \text{مساحت کل} \\ \Rightarrow \text{مساحت کل} = 12\pi \text{ cm}^2 \quad \text{۸}$$



چون $\frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$ پس $\frac{1}{4}$ نیم کره بالایی برداشته شده است. بنابراین $\frac{1}{8}$ کل حجم کره برداشته شده است.

$$V_{\text{باقیمانده}} = V_{\text{کل}} - V_{\text{حذف شده}} = \frac{4}{3} \pi r^3 - \left(\frac{1}{8}\right) \left(\frac{4}{3} \pi r^3\right) = \frac{4 \pi r^3}{3} - \frac{\pi r^3}{6} = \frac{7 \pi r^3}{6}$$

$$\frac{V_{\text{کره}}}{S_{\text{کره}}} = \frac{\frac{4}{3} \pi (3)^3}{4 \pi (3)^2} = 1$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3} \pi (5)^3 = \frac{500}{3} \pi$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi \times (5)^2 \times (10) = 250 \pi$$

$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = 250 \pi - \frac{500}{3} \pi = \frac{250}{3} \pi$$

$$4 \pi R^2 = 300 \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5 \text{ cm}$$

$$V_{\text{توپ}} = \frac{4}{3} \pi \times (5)^3 = \frac{4}{3} \pi \times 125 = 500 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{نیم کره}} = \frac{2}{3} \times 3 \times (6)^3 = 432$$

$$3 \times (6)^2 \times x = 432 \Rightarrow 108 \times x = 432 \Rightarrow x = 4$$

هرمی که چندضلعی قاعده‌اش منتظم باشد و وجه‌های جانبی آن با یکدیگر هم‌نهشت باشند هرم منتظم نام دارد.

اگر S مساحت قاعده منشور و h ارتفاع منشور باشد، آن‌گاه $V_{\text{منشور}} = Sh$.

با توجه به فرض مسئله $Sh = 1500$ ، مخروط V ، بنابراین $\frac{1}{3} V_{\text{منشور}} = 1500 \Rightarrow V_{\text{منشور}} = 4500$

الف) فرض کنید R شعاع کره باشد.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3} \pi (3R)^3}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{27R^3}{R^3} = 27$$

(گزینه ۲ صحیح است)

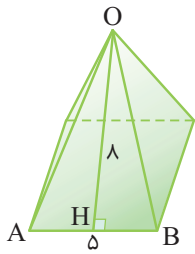
$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} \times (8 \times 12) \times 5 = 160$$

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \left(\frac{6 \times 4}{2}\right) \times 12 = 48$$

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \left(\frac{4 \times 10}{2}\right) \times 12 = 80$$

۱۷) فرض کنید h ارتفاع هرم و S مساحت قاعده آن باشد.

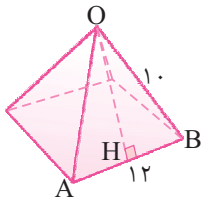
۱۸) فرض کنید h ارتفاع هرم و S مساحت قاعده آن باشد.



$$S_{OAB} = \frac{8 \times 5}{2} = 20$$

$$S_{\text{جانبی هرم}} = 4 S_{OAB} = 4 \times 20 = 80$$

۱۹



$$\Delta OHB: 10^2 = 6^2 + OH^2 \Rightarrow OH = 8$$

$$S_{OAB} = \frac{8 \times 12}{2} = 48$$

$$S_{\text{جانبی هرم}} = 4 \times S_{OAB} = 4 \times 48 = 192$$

۲۰

$$V = \frac{1}{3} \times (a^2) \times h$$

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{8 \times 5}{2} \right) \times 12 = 80$$

$$S_{\text{کره}} = 36\pi \Rightarrow 4\pi R^2 = 36\pi \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3 \text{ cm}$$

۲۱

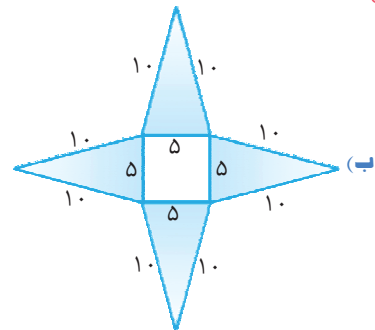
الف ۲۲

ب

الف ۲۳ چون هرم منتظم است و قاعده آن مربعی به ضلع ۱۲ است، پس $HM = 6$

$$\Delta OHM: 10^2 = OH^2 + 6^2 \Rightarrow OH = 8$$

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} \times (12^2) \times 8 = 384$$



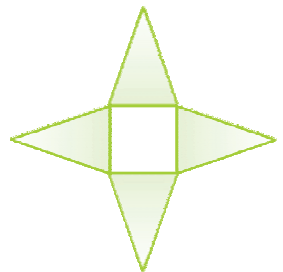
ب

$$V_{\text{هرم}} = 80 \Rightarrow \frac{1}{3} \times (6 \times 10) \times h = 80 \Rightarrow 20h = 80 \Rightarrow h = 4$$

الف ۲۴

ب

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (2^2) 6 = 8\pi$$



الف ۲۵

ب

$$V_{\text{مخروط}} = 300 \Rightarrow \frac{1}{3} \times 3 \times 5^2 \times h = 300 \Rightarrow h = 12 \text{ cm}$$



$$13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 12 \text{ cm}$$

الف) ۲۶

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 12 = 100\pi$$

ب)

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \times 3(3)^2 \times 12 = 108$$

۲۷

$$V_{\text{قسمت پر شده استوانه}} = 108 \Rightarrow 3 \times 6^2 \times x = 108 \Rightarrow x = 1$$

فرض کنید x ارتفاع آب در استوانه باشد. پس

$$\text{شعاع قاعده مخروط} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

۲۸

$$h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$$

فرض کنید h ارتفاع مخروط باشد، پس

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi (3^2) 4 = 12\pi$$

الف) مخروط ۲۹

ب)

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi (3^2) 10 = 30\pi$$

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} (\lambda)^2 12 = 256$$

الف) فرض کنید S مساحت قاعده هرم و h ارتفاع آن باشد.

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi (6^2) 10 = 120\pi$$

ب) شکل حاصل از دوران یک مخروط به شعاع قاعده ۶ و ارتفاع ۱۰ است.

$$\text{الف) مساحت کره برابر است با } S_{\text{کره}} = 4 \times 3 \times 5^2 = 300 \text{ cm}^2 \text{ پس}$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi (5^2) 6 = 50\pi$$

ب) شکل حاصل از دوران یک مخروط به شعاع قاعده ۵ و ارتفاع ۶ است. پس

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{4}{3} \times 3 \times (10^3) = 4000 \text{ cm}^3 \text{ (سانتی متر مکعب)}$$

الف) شکل حاصل از دوران یک کره به شعاع ۱۰ است:

$$\text{(سانتی متر مربع)} \quad 6(6^2) = 216 \text{ cm}^2 = \text{مساحت کل مکعب}$$

ب)

۳۳ فرض کنید r شعاع قاعده استوانه و h ارتفاع آن باشد.

$$\text{سانتی متر مربع} \quad 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi(2)(10) + 2\pi(2^2) = 40\pi + 8\pi = 48\pi$$

$$S_{\text{کره}} = 4\pi(5^2) = 100\pi$$

الف) ۳۴

$$V_{\text{هرم}} = 100 \Rightarrow \frac{1}{3} \times 30 \times h = 100 \Rightarrow h = 10 \text{ cm}$$

ب) فرض h ارتفاع هرم مورد نظر باشد.

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi (2^2) 6 = 8\pi$$

$$x = 10, \quad y = 5$$

۳۵