فصل اول: اصول شمارش

بخش اول: اصل ضرب

در این فصل اصول شمارش را بیان می‌کنیم و با حل مسأله‌هایی متنوع روش‌های به‌کارگیری این اصول را در حل مسائل شمارشی آموزش می‌دهیم.

مسأله‌ی ۱ : یک تولیدی لباس ورزشی در ۳ اندازه‌ی کوچک، متوسط و بزرگ و در چهار رنگ سفید، آبی، قرمز و زرد لباس تولید می‌کند. این تولیدی چند نوع مختلف لباس تولید می‌کند؟

راه‌حل: توجه کنید که طبق فرض مسأله نوع هر لباس با اندازه و رنگ آن مشخص می شود، یعنی اگر دو لباس، هم‌اندازه و هم‌رنگ باشند از یک نوع‌اند و برعکس اگر دو لباس از یک نوع باشند هم‌اندازه و هم‌رنگ‌اند. حال قفسه‌ای مانند شکل روبه‌رو در نظر می‌گیریم و هر لباس را برحسب اندازه و رنگ آن در قسمت مربوطه قرار می‌دهیم. با توجه به آن‌چه گفتیم لباس‌هایی که در یک قسمت قرار می‌گیرند از یک نوع‌اند و لباس‌هایی که در قسمت‌های مختلف قرار می‌گیرند از یک نوع نیستند. اکنون واضح است که این تولیدی $۱۲=۴\times۳$ نوع مختلف لباس می‌تواند تولید کند.

	سفید	آبی	قرمز	زرد
بزرگ				
متوسط				
کوچک				

اصل ضرب (صورت ساده)

فرض کنید نحوه‌ی انجام کاری را بتوان به دو مرحله تجزیه کرد، مرحله‌ی اول به m طریق و به ازای هر طریق نحوه‌ی انجام مرحله‌ی اول، مرحله‌ی دوم به n طریق قابل انجام باشد. در این صورت کل کار به mn طریق قابل انجام است.

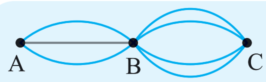
در مسأله‌ی قبل عمل تولید یک نوع لباس را می‌توانیم به دو مرحله تجزیه کنیم، مرحله‌ی اول انتخاب اندازه و مرحله‌ی دوم انتخاب رنگ. مرحله‌ی اول به ۳ طریق و به ازای هر طریق انتخاب اندازه، مرحله‌ی دوم به ۴ طریق قابل انجام است. لذا طبق اصل ضرب عمل تولید یک نوع لباس به ۴×۳ طریق قابل انجام است یا معادلاً تولیدی می‌تواند ۱۲ نوع مختلف لباس تولید کند.

در حالت کلی اصل ضرب در مسأله‌هایی که بتوان نحوه‌ی انجام کار را به چند مرحله تجزیه کرد کاربرد دارد.

اصل ضرب (صورت کلی)

فــرض کنید نحــوه‌ی انجام کاری را بتوان به k مرحله تجزیه کرد، مرحله‌ی اول به n_1 طریق قابل انجام باشد و به ازای هر i، $2 \le i \le k$، مرحله‌ی i اُم مستقل از نحوه‌ی انجام مراحل اول تا $i-1$ اُم به n_i طریق قابل انجام باشد. در این صورت کل کار به $n_1 n_2 \ldots n_k$ طریق قابل انجام است.

مسأله‌ی ۲: بین دو شــهر A و B ســه جاده و بین شهرهای B و C چهار جاده احداث شده است.



الف) به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت؟

ب) به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت و به شهر A برگشت؟

ج) به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت و به شهر A برگشت به‌طوری که هر جاده حداکثر یک بار طی شود؟

راه‌حل: **الــف)** عمل رفتن از A به C را به دو مرحلــه تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، رفتــن از A بــه B، و مرحله‌ی دوم، رفتن از B به C. مرحلــه‌ی اول به ۳ طریق و مرحله‌ی دوم مســتقل از نحوه‌ی انجام مرحله‌ی اول به ۴ طریق قابل انجام است. لذا کل کار به 3×4 طریق قابل انجام است.

ب) عمل رفتن از A به C و برگشت به A را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، رفتن از A به C، و مرحله‌ی دوم، رفتن از C به A. مرحله‌ی اول به ۱۲ طریق و مرحلــه‌ی دوم نیز مســتقل از نحوه‌ی انجام مرحله‌ی اول بــه ۱۲ طریق قابل انجام است. لذا کل کار به 12×12 طریق قابل انجام است.

ج) عمل رفت و برگشت را به چهار مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، رفتن از A به B، مرحله‌ی دوم، رفتن از B به C، مرحله‌ی سوم، رفتن از C به B و مرحله‌ی چهارم، رفتن از B به A. مرحله‌ی اول به ۳ طریق، مرحله‌ی دوم مســتقل از نحوه‌ی انجام مرحله‌ی اول به ۴ طریق، مرحله‌ی ســوم مستقل از نحوه‌ی انجام مراحل اول و دوم به ۳ طریق و مرحله‌ی چهارم مستقل از نحوه‌ی انجام مراحل اول، دوم و سوم به ۲ طریق انجام است. لذا کل کار به $3 \times 4 \times 3 \times 2$ طریق قابل انجام است.

مسأله‌ی ۳: الف) چند کلمه‌ی سه حرفی با حروف a، b، c، d و e می‌توان نوشت؟

ب) در چند کلمه حروف مجاور متمایزند؟

ج) در چند کلمه هر سه حرف متمایزند؟

راه‌حل: عمل نوشــتن کلمه‌ی سه حرفی را به ۳ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، نوشــتن حرف اول، مرحله‌ی دوم، نوشــتن حرف دوم و مرحله‌ی سوم، نوشتن حرف سوم. در قسمت (الف) هر مرحله مستقل از نحوه‌ی انجام مراحل قبل به ۵ طریق قابل انجام است. لذا پاسخ قسمت (الف) برابر 5^3 است.

$$\underset{1}{5} \quad \underset{2}{5} \quad \underset{3}{5}$$

در قســمت (ب) برای حــرف اول کلمه ۵ انتخاب و برای هــر انتخاب حرف اول، ۴ انتخــاب برای حرف دوم و برای هر انتخاب از حرف‌های اول و دوم، ۴ انتخاب برای حرف سوم وجود دارد. لذا پاسخ قسمت (ب) برابر $۵×۴×۴$ است.

۵ ۴ ۴
۱ ۲ ۳

در قسمت (ج) مراحل اول، دوم و سوم مستقل از نحوه‌ی انجام مراحل قبل به‌ترتیب به ۵، ۴ و ۳ طریق قابل انجام‌اند. لذا پاسخ قسمت (ج) برابر $۵×۴×۳$ است.

۵ ۴ ۳
۱ ۲ ۳

در برخی از مسائل شمارشی انتخاب مناسب ترتیب مراحل انجام، حل مسأله را بسیار ساده می‌کند.

مسأله‌ی ۴: چند عدد سه‌رقمی فرد با ارقام متمایز وجود دارد؟

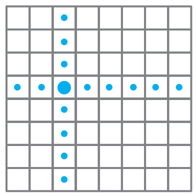
راه‌حل: عمل نوشتن یک عدد سه‌رقمی با ویژگی‌های گفته شده را به ۳ مرحله تجزیه می‌کنیم. ابتدا نوشتن رقم صدگان، سپس رقم دهگان و در نهایت رقم یکان. برای رقم صــدگان ۹ انتخــاب (هر یک از رقم‌هــای ۱ تا ۹) و به ازای هــر طریق انتخاب رقم صــدگان، ۹ انتخــاب برای رقم دهگان (هر یک از رقم‌های ۰ تا ۹ غیر از رقمی که در مرتبه‌ی صدگان قرار گرفته) وجود دارد.

۹ ۹ ◯
۱ ۲ ۳

حــال باید یک رقم فرد در مرتبه‌ی یکان قرار دهیم. اگر رقم‌های دهگان و صدگان هر دو فرد باشــند برای رقم یکان ۳ انتخاب، اگر فقط یکی از این دو رقم فرد باشــند برای رقم یکان ۴ انتخاب و اگر هر دو رقم زوج باشند برای رقم یکان ۵ انتخاب وجود دارد. پس تعداد راه‌های انجام مرحله‌ی سوم به نحوه‌ی انجام مراحل اول و دوم وابسته است و لذا اینجا از اصل ضرب نمی‌توانیم اســتفاده کنیم. در واقع ترتیب مراحل نوشتن عدد سه‌رقمی به طور مناسب انتخاب نشده است. با توجه به این که در این مسأله رقم‌های یکان و صدگان محدودیت دارند (رقم یکان باید فرد و رقم صدگان باید ناصفر باشــد) لذا برای نوشــتن عدد ســه‌رقمی با ویژگی‌های مورد نظر ابتدا رقم یکان، ســپس رقم صدگان و در نهایت رقم دهگان را می‌نویسیم و به راحتی می‌توان دید که این سه مرحله به ترتیب به ۵، ۸ و ۸ طریق قابل انجام هستند، لذا پاسخ مسأله برابر $۵×۸×۸$ است.

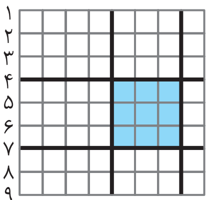
۸ ۸ ۵
۲ ۳ ۱

مسأله‌ی ۵: به چند طریق می‌توان یک مهره‌ی رخ ســفید و یک مهره‌ی رخ ســیاه را در دو خانه از صفحه‌ی شطرنجی $۸×۸$ قرار داد به‌طوری که یک‌دیگر را تهدید نکنند؟ (دو رخ در صورتی یک‌دیگر را تهدید می‌کنند که در یک سطر یا یک ستون قرار داشته باشند.)



راه‌حل: عمــل قــرار دادن دو رخ را بــه دو مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، قرار دادن رخ سفید و مرحله‌ی دوم، قرار دادن رخ ســیاه. برای قرار دادن رخ سفید ۶۴ انتخاب وجود دارد و رخ ســفید در هر خانه‌ای که قرار گیرد برای رخ ســیاه ۴۹ انتخــاب وجــود دارد، زیرا رخ ســفید تمام خانه‌های یک ســطر و یک ســتون از صفحه‌ی شطرنج را تهدید می‌کند و در واقع رخ سیاه را باید در یکی از خانه‌های واقع در تقاطع ۷ سطر و ۷ ستون باقی‌مانده قرار دهیم (شکل فوق را ملاحظه کنید). لذا پاسخ مسأله برابر ۶۴×۴۹ است.

مسأله‌ی ۶: چند مربع ۳×۳ در صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸ وجود دارد؟



راه‌حل: هر مربع ۳×۳ از برخورد دو خط افقی به فاصله‌ی ۳ و دو خط عمودی به فاصله‌ی ۳ ایجاد می‌شــود. لذا عمل ساختن یک مربع ۳×۳ را به دو مرحله‌ی تجزیه می‌کنیم، مرحله‌ی اول، انتخاب دو خط افقی به فاصله‌ی ۳ و مرحله‌ی دوم، انتخاب دو خط عمودی به فاصله‌ی ۳.
هر یک از این دو مرحله به ۶ طریق قابل انجام هستند (به عنوان مثال برای انتخاب دو خط افقی به فاصله‌ی ۳ باید دو خط افقی با شماره‌های k و $k+۳$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند انتخاب کنیم و چون ۹ خط افقی وجود دارد لذا مقادیر قابل قبول برای k عبارتند از ۱، ۲، ... و ۶. پس به ۶ طریق می‌توان دو خط افقی به فاصله‌ی ۳ انتخاب کرد). در نتیجه $۶\times۶=۳۶$ مربع ۳×۳ در صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸ وجود دارد.

مسأله‌ی ۷: یک مدرسه ۶ کلاس ۳۰ نفره دارد. قرار است از هر کلاس حداکثر یک نفر برای شرکت در مسابقه‌ی ریاضی انتخاب شود.
الف) به چند طریق می‌توان شــرکت‌کنندگان در مســابقه‌ی ریاضی را تعیین کرد؟ (توجه کنید یک حالت این است که هیچ فردی در مسابقه شرکت نکند.)
ب) اگر قرار باشد که از هر کلاس دقیقاً یک نفر انتخاب شود پاسخ قسمت (الف) چگونه خواهد بود؟

راه‌حل: **الــف)** کلاس‌ها را با اعداد ۱، ۲، ... و ۶ نام‌گــذاری می‌کنیم. عمل انتخاب افراد شرکت‌کننده در مســابقه را به ۶ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، انتخاب حداکثر یک نفر از کلاس ۱، ... و مرحله‌ی ششم، انتخاب حداکثر یک نفر از کلاس ۶. هــر مرحلــه به ۳۱ طریق قابل انجام اســت (از هر کلاس یــا هیچ فردی انتخاب نمی‌شود یا یکی از ۳۰ دانش‌آموز انتخاب می‌شود). لذا پاسخ برابر $۳۱^{۶}$ است.
ب) مشابه راه‌حل قسمت (الف) عمل انتخاب شرکت‌کنندگان را به ۶ مرحله تجزیه می‌کنیم. در این قسمت هر مرحله به ۳۰ طریق قابل انجام است و لذا پاسخ برابر $۳۰^{۶}$ است.

مسأله‌ی ۸: الف) به چند طریق می‌توان یک سیب، یک پرتقال و یک گلابی را بین ۵ نفر توزیع کرد؟
ب) در چند حالت به هر نفر حداکثر یک میوه می‌رسد؟

راه‌حل: عمل توزیع میوه‌ها را به ۳ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، توزیع سیب، مرحله‌ی دوم، توزیع پرتقال و مرحله‌ی سوم، توزیع گلابی. در قسمت (الف) هر یک از این مراحل به ۵ طریق قابل انجام است، لذا پاسخ قسمت (الف) برابر $۵^۳$ است و در قسمت (ب) مراحل اول، دوم و سوم به ترتیب به ۵، ۴ و ۳ طریق قابل انجام‌اند، لذا پاسخ قسمت (ب) برابر $۳\times۴\times۵$ است.

مسأله‌ی ۹: مجموعه‌ی $X=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

راه‌حل: عمل ساخت یک زیرمجموعه از X را به ۵ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول تعیین جای عدد ۱، ... و مرحله‌ی پنجم تعیین جای عدد ۵. هر یک از این مراحل مستقل از نحوه‌ی انجام مراحل قبل به ۲ طریق قابل انجام است (در واقع قرار دادن عدد مورد نظر در داخل زیرمجموعه یا خارج آن). لذا به $۲^۵$ طریق می‌توان یک زیرمجموعه از X را ساخت. پس X، $۲^۵$ زیرمجموعه دارد.

در حالت کلی قضیه‌ی زیر درست است.

قضیه ۱ **یک مجموعه n عضوی، ۲^n زیرمجموعه دارد.**

مسأله‌ی ۱۰: در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $X=\{۱,۲,\dots,۷\}$ بزرگ‌ترین عضو برابر ۵ است؟

راه‌حل: عمل ساخت یک زیرمجموعه از X را به ۷ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول تعیین جای عدد ۱، ... و مرحله‌ی هفتم تعیین جای عدد ۷. هر یک از مراحل اول تا چهارم به ۲ طریق قابل انجام‌اند و هر یک از ۳ مرحله‌ی باقی‌مانده به یک طریق، زیرا عدد ۵ باید داخل زیرمجموعه قرار گیرد و اعداد ۶ و ۷ باید خارج زیرمجموعه قرار گیرند. لذا پاسخ مسأله برابر $۲^۴$ است.

مسأله‌ی ۱۱: عدد ۱۵۰۰ چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

راه‌حل: تجزیه‌ی استاندارد ۱۵۰۰ به صورت $۲^۲\times۳^۱\times۵^۳$ است. لذا هر مقسوم‌علیه مثبت ۱۵۰۰ به صورت $۲^a\times۳^b\times۵^c$ است که $۰\le a\le ۲$، $۰\le b\le ۱$ و $۰\le c\le ۳$. حال عمل ساختن یک مقسوم‌علیه ۱۵۰۰ را به ۳ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، انتخاب a، مرحله‌ی دوم، انتخاب b و مرحله‌ی سوم، انتخاب c. مراحل اول، دوم و سوم به ترتیب به ۳، ۲ و ۴ طریق قابل انجام‌اند (مثلاً a برابر ۰،۱ یا ۲ است لذا ۳ انتخاب برای a وجود دارد). در نتیجه ۱۵۰۰ دارای $۳\times۲\times۴=۲۴$ مقسوم‌علیه مثبت است.

مسألهٔ ۱۲ : چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $X=\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ تعداد فردی عضو دارند؟

راه‌حل: عمل ساختن یک زیرمجموعه از X را به ۵ مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول تعیین جای عدد ۱، ... و مرحله‌ی پنجم تعیین جای عدد ۵. هر یک از مراحل اول تا چهارم به ۲ طریق قابل انجام‌اند و مرحله‌ی پنجم به یک طریق قابل انجام است زیرا اگر تعداد زوجی عدد از اعداد ۱ تا ۴ داخل زیرمجموعه قرار گرفته باشند، عدد ۵ باید داخل زیرمجموعه قرار گیرد و اگر تعداد فردی عدد از اعداد ۱ تا ۴ داخل زیرمجموعه قرار گرفته باشند، عدد ۵ باید خارج زیرمجموعه قرار گیرد. لذا پاسخ مسأله برابر $۲^۴$ است.

در حالت کلی قضیه‌ی بعد درست است.

قضیه ۲ **یک مجموعه‌ی n عضوی $۲^{n-۱}$ زیرمجموعه‌ی فرد عضوی و $۲^{n-۱}$ زیرمجموعه‌ی زوج عضوی دارد.**

فصل اول

مسائل

بخش اول:اصل ضرب

۱- بــه چنــد طریق می‌توان کمیته‌ای دو نفره متشــکل از یک مرد و یک زن از میــان ۶ مرد و ۸ زن انتخاب کرد؟

۲- از میان ۱۰ زوج (زن و شــوهر) به چند طریق می‌توان یک مرد و یک زن انتخاب کرد به‌طوری که همسر یک‌دیگر نباشند؟

۳- گچ‌های یک مدرسه در ۲ اندازه، ۵ رنگ و ۳ قطر مختلف هستند. حداکثر چند نوع گچ در این مدرسه وجود دارد؟

۴- چند عدد چهاررقمی فرد با رقم‌های متمایز وجود دارد؟

۵- چند کلمه‌ی چهار حرفی با حروف a، b، c، d، e و f می‌توان نوشت به شرط آن که

الف) تکرار حروف مجاز باشد؟

ب) تکرار حروف مجاز نباشد؟

۶- الف) در چند کلمه‌ی چهار حرفی با حروف انگلیسی حروف اول و آخر صدا دارند؟

ب) در چند تا از این کلمات فقط حروف اول و آخر صدا دارند؟

۷- یک عدد ۵ رقمی را متقارن گوییم هرگاه به صورت $\overline{abcba}$ باشد (مثلاً اعداد ۱۱۱۱۱، ۲۳۲۳۲ و ۷۲۸۲۷ متقارنند). چند عدد ۵ رقمی متقارن وجود دارد؟

۸- الف) در چند کلمه‌ی ۱۰ حرفی با حروف a، b، c، d، e، f و g حروف مجاور متمایزند؟

ب) در چند تا از این کلمات هر سه حرف مجاور متمایزند؟

۹- الف) به چند طریق می توان یک مهره‌ی ســفید و یک مهره‌ی ســیاه را در دو خانه از صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸ قرار داد به‌طوری که در یک سطر یا یک ستون باشند؟

ب) به چند طریق می‌توان ســه مهره‌ی متمایز را در ســه خانه از صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸ قرار داد به‌طوری که هیچ دوتایی در یک سطر یا یک ستون قرار نگیرند؟

۱۰- چند عدد چهاررقمی زوج با رقم‌های متمایز با رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ وجود دارد؟

۱۱- شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید.

الف) به چند طریق می‌توان از A به D رفت؟

ب) بــه چند طریق می‌توان از A به D رفت و به A برگشت؟

ج) در چند مسیر از مسیرهای قسمت (ب) هر جاده حداکثر یک بار طی شده است؟

۱۲- در صفحه‌ی شطرنجی 8×8 چند مستطیل 4×3 (افقی یا عمودی) وجود دارد؟

۱۳- الف) چند عدد از مجموعه‌ی $\{1,2,\ldots,10000\}$ دقیقاً یک رقم ۵ دارند؟

ب) چند عدد از این مجموعه دقیقاً یک رقم ۷ و یک رقم ۸ دارند؟

۱۴- الف) به چند طریق می‌توان ۷ نفر را در ۱۰ اتاق متمایز توزیع کرد؟

ب) در چند حالت در هر اتاق حداکثر یک نفر قرار می‌گیرد؟

۱۵- یک امتحان از ۱۰ تست چهارگزینه‌ای تشکیل شده است. یک دانش‌آموز به چند طریق می‌تواند به این سؤالات پاسخ دهد به‌طوری که

الف) پاسخ دادن به هر تست الزامی باشد (یعنی از هر تست یکی از ۴ گزینه را به عنوان پاسخ علامت بزند)؟

ب) پاسخ دادن به همه‌ی تست‌ها الزامی نباشد؟

۱۶- پس از ضرب، حاصل عبارت زیر چند جمله‌ی متمایز خواهد داشت؟

$$(x+y)(a+b+c)(e+f+g)(h+i)$$

۱۷- به چند طریق می‌توان یک مهره‌ی اسب سفید و یک مهره‌ی اسب سیاه را در صفحه‌ی شطرنجی 8×8 قرار داد به‌طوری که یک‌دیگر را تهدید کنند؟

۱۸- چند عدد ۷ رقمی با رقم‌های ۱، ۱، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌توان نوشت؟

۱۹- ۱۰ نفر را به چند طریق می‌توان به ۵ تیم دو نفره تقسیم کرد؟

۲۰- یک تاس سفید و یک تاس قرمز را پرتاب می‌کنیم.

الف) در چند حالت مجموع اعداد رو شده فرد است؟

ب) در چند حالت مجموع اعداد رو شده بر ۳ بخش‌پذیر است؟

۲۱- در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $\{1,2,\ldots,10\}$ اعداد ۱ و ۲ وجود دارند ولی عدد ۳ وجود ندارد؟

۲۲- در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $\{1,2,\ldots,10\}$ کوچک‌ترین عضو برابر ۳ و بزرگ‌ترین عضو برابر ۹ است؟

۲۳- در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $\{1,2,\ldots,10\}$ اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو برابر ۵ است؟

۲۴- ۳۰ سکو در یک ردیف از چپ به راست با شماره‌های ۱ تا ۳۰ قرار دارند. یک قورباغه روی سکوی شماره‌ی ۱ قرار دارد و می‌خواهد خود را به روی سکوی شماره‌ی ۳۰ برساند. این قورباغه در هر حرکت هر چند سکو که بخواهد می‌تواند به سمت راست پرش کند (از ۱ تا ۲۹ سکو). قورباغه به چند طریق می‌تواند خود را به سکوی شماره‌ی ۳۰ برساند؟

۲۵- الف) عدد $۴^{۱۰}\times۶^{۸}\times۱۰^{۱۲}$ چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

ب) چند مقسوم‌علیه مثبت از این عدد بر ۳۰۰۰ بخش‌پذیرند؟

۲۶- اعداد $۲^{۱۰}\times۳^{۱۲}\times۵^{۸}\times۷^{۶}$ و $۲^{۵}\times۳^{۱۷}\times۷^{۹}\times۱۱^{۳}$ چند مقسوم‌علیه مشترک مثبت دارند؟

۲۷- ۱۰ سکه‌ی ۵ تومانی، ۸ سکه‌ی ۱۰ تومانی و ۱۷ سکه‌ی ۲۵ تومانی در اختیار داریم. به چند طریق می‌توان یک قلک را با تعدادی (حداقل صفر و حداکثر ۳۵) از این سکه‌ها پر کرد؟ (توجه کنید که سکه‌های هم‌ارزش یکسانند.)

۲۸- به چند طریق می‌توان اعداد ۱، ۲، ... و ۱۰ را در یک ردیف قرار داد به‌طوری که هر عدد در این ردیف (غیر از اولین عدد) از همه‌ی اعداد سمت چپ خود بزرگ‌تر یا از همه‌ی این اعداد کوچک‌تر باشد؟

۲۹- ۵ سکه‌ی ۱ ریالی (یکسان) و یک عدد از هر یک از سکه‌های ۲، ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ ریالی در اختیار داریم. به چند طریق می‌توان ۵ تا از این سکه‌ها را در یک قلک انداخت؟

۳۰- در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $\{۱,۲,\dots,۱۰\}$ اعداد ۱ و ۲ وجود دارند، عدد ۷ وجود ندارد و در ضمن تعداد اعضا عددی فرد است؟

۳۱- در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $\{۱,۲,\dots,۱۰\}$ اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو برابر ۵ است و درضمن تعداد اعضا عددی زوج است؟

۳۲- چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $\{۱,۲,\dots,۱۰\}$ تعداد فردی عضو از $\{۱,\dots,۵\}$ و تعداد زوجی عضو از $\{۶,\dots,۱۰\}$ را دارد؟