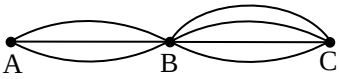
فصل هفتم: ترکیبیات

۷-۱: اصل ضرب

اصل ضرب: فرض کنید نحوه‌ی انجام کاری را بتوان به دو مرحله تجزیه کرد. مرحله‌ی اول به m طریق و به ازای هر طریق نحوه‌ی انجام مرحله‌ی اول، مرحله‌ی دوم به n طریق قابل انجام باشد. در این‌صورت کل کار به mn طریق قابل انجام است.

مسأله‌ی (۱): بین دو شهر A و B سه جاده و بین شهرهای B و C چهار جاده احداث شده است.
الف) به چند طریق می‌توان از A به C رفت؟
ب) به چند طریق می‌توان از A به C رفت و به A برگشت؟



راه حل: الف) عمل رفتن از A به C را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، رفتن از A به B و مرحله‌ی دوم رفتن از B به C. مرحله‌ی اول را به ۳ طریق می‌توانیم انجام دهیم و به هر صورتی که مرحله‌ی اول انجام شود، مرحله‌ی دوم را به ۴ طریق می‌توانیم انجام دهیم. لذا بنا بر اصل ضرب به $3\times 4=12$ طریق می‌توان از A به C رفت.

ب) عمل رفت و برگشت را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، رفتن از A به C و مرحله‌ی دوم، برگشت به A. در قسمت قبل دیدیم که به ۱۲ طریق می‌توانیم از A به C برویم. حال به هر صورتی که از A به C برویم مجدداً به ۱۲ طریق می‌توانیم از C به A برگردیم. در نتیجه بنا بر اصل ضرب به $12\times 12=144$ طریق می‌توان از A به C رفت و به A برگشت.

مسأله‌ی (۲): به چند طریق می‌توان کمیته‌ای دو نفره متشکل از یک مرد و یک زن از میان 5 مرد و 4 زن انتخاب کرد؟

راه حل: عمل انتخاب کمیته را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، انتخاب یک مرد و مرحله‌ی دوم، انتخاب یک زن. مرحله‌ی اول را به 5 طریق و مرحله‌ی دوم را به 4 طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس بنابر اصل ضرب به $5\times 4=20$ طریق می‌توان کمیته‌ی دو نفره را انتخاب کرد.

مسأله‌ی (۳): از میان 7 عضو یک انجمن به چند طریق می‌توان یک رئیس و یک معاون انتخاب کرد؟

راه حل: عمل انتخاب رئیس و معاون را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، انتخاب رئیس و مرحله‌ی دوم، انتخاب معاون. مرحله‌ی اول را به ۷ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس از انتخاب رئیس، باید یکی از ۶ عضو باقی‌مانده را به عنوان معاون انتخاب کنیم، لذا مرحله‌ی دوم را به ۶ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس بنا بر اصل ضرب به $7\times 6=42$ طریق می‌توانیم رئیس و معاون را انتخاب کنیم.

مسأله‌ی (۴): الف) چند عدد دو رقمی وجود دارد؟
ب) چند عدد دو رقمی فرد وجود دارد؟

راه حل: عمل نوشتن عدد دو رقمی را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم. مرحله‌ی اول، نوشتن رقم دهگان و مرحله‌ی دوم، نوشتن رقم یکان.

الف) برای رقم دهگان 9 انتخاب (یکی از ارقام 1 تا 9) و به ازای هر انتخابی از رقم دهگان، برای رقم یکان 10 انتخاب (یکی از ارقام صفر تا 9) وجود دارد، لذا تعداد اعداد دو رقمی برابر $9\times 10=90$ است.

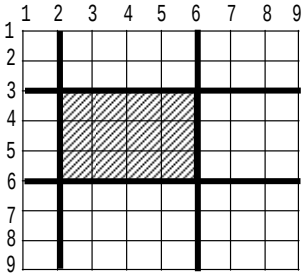
⑨ ⑩

ب) در این قسمت برای رقم دهگان 9 و برای رقم یکان 5 انتخاب (یکی از ارقام 1، 3، 5، 7 و 9) وجود دارد، لذا تعداد اعداد دو رقمی فرد برابر $9\times 5=45$ است.

⑨ ⑤

مسألهی (۵): در صفحهی شطرنجی 8×8 چند مستطیل 4×3 (افقی) وجود دارد؟

راه حل: هر مستطیل 4×3 از برخورد دو خط افقی به فاصلهی ۳ و دو خط عمودی به فاصلهی ۴ ایجاد میشود. لذا عمل ساختن یک مستطیل 4×3 را به دو مرحله تجزیه میکنیم. مرحلهی اول، انتخاب دو خط افقی به فاصلهی ۳ و مرحلهی دوم، انتخاب دو خط عمودی به فاصلهی ۴.



توجه کنید که صفحهی شطرنجی 8×8 همانگونه که در شکل ملاحظه میکنید از ۹ خط افقی و ۹ خط عمودی تشکیل شده است. برای انتخاب دو خط افقی به فاصلهی ۳ باید دو خط افقی با شمارههای k و $k+3$ را که در شکل مشخص شدهاند انتخاب کنیم. چون ۹ خط افقی وجود دارد، لذا مقادیر قابل قبول برای k عبارتند از ۱، ۲، . . . و ۶. پس به ۶ طریق میتوانیم دو خط افقی به فاصلهی ۳ انتخاب کنیم و با همین استدلال نتیجه میگیریم که به ۵ طریق میتوان دو خط عمودی به فاصلهی ۴ انتخاب کرد. لذا در صفحهی شطرنجی 8×8، $6\times 5=30$ مستطیل 4×3 افقی وجود دارد.

تست (۱): اتوبوسی با دو مسافر، در 8 ایستگاه توقف میکند. این دو نفر به چند طریق میتوانند در این ایستگاهها پیاده شوند؟

۱) 16 ۲) 56 ۳) 256 ٤) 64

پاسخ: نفر اول در هر کدام از این ۸ ایستگاه میتواند پیاده شود. نفر دوم نیز مستقل از اینکه نفر اول در کدام ایستگاه پیاده شده است میتواند در هر کدام از ۸ ایستگاه پیاده شود، بنابراین این دو نفر به $8\times 8=64$ طریق میتوانند از این اتوبوس پیاده شوند.
بنابراین گزینهی (۴) درست است.

در حالت کلی اصل ضرب در مسألههایی که بتوان نحوهی انجام کار را به چند مرحله تجزیه کرد کاربرد دارد.

اصل ضرب (صورت کلی)

فرض کنید نحوهی انجام کاری را بتوان به k مرحله تجزیه کرد. مرحلهی اول به n_1 طریق قابل انجام باشد، به هر روشی که مرحلهی اول انجام شود، مرحلهی دوم به n_2 طریق قابل انجام باشد، . . . و به هر روشی که مراحل اول تا $k-1$ام انجام شوند، مرحلهی kام به n_k طریق قابل انجام باشد. در این صورت کل کار به $n_1n_2...n_k$ طریق قابل انجام است.

مسألهی (۶): الف) چند کلمهی سه حرفی با حروف a، b، c، d، e و f میتوان نوشت؟
ب) در چند کلمه حروف مجاور متمایزند؟
ج) در چند کلمه هر سه حرف متمایزند؟

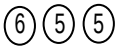
راه حل: عمل نوشتن کلمهی سه حرفی را به ۳ مرحله تجزیه میکنیم. مرحلهی اول، نوشتن حرف اول، مرحلهی دوم، نوشتن حرف دوم و مرحلهی سوم، نوشتن حرف سوم.



الف) باید یکی از ۶ حرف داده شده را در جایگاه شمارهی ۱ بنویسیم و پس از آن یکی از این ۶ حرف را در جایگاه شمارهی ۲ و در نهایت یکی از این حروف را در جایگاه شمارهی ۳ بنویسیم. پس بنا بر اصل ضرب، $6\times 6\times 6=216$ کلمهی سه حرفی با ۶ حرف داده شده وجود دارد.



ب) باید یکی از ۶ حرف را در جایگاه شمارهی ۱ بنویسیم، لذا مرحلهی اول را به ۶ طریق میتوانیم انجام دهیم. پس از نوشتن حرف اول، باید حرفی غیر از حرف نوشته شده در جایگاه اول را در جایگاه شمارهی ۲ بنویسیم (زیرا حرف اول و دوم کلمه نباید یکسان باشند) لذا مرحلهی دوم را به ۵ طریق میتوانیم انجام دهیم. در نهایت باید حرفی غیر از حرف نوشته شده در جایگاه دوم را در جایگاه شمارهی ۳ بنویسیم، (زیرا حرف دوم و سوم کلمه نباید یکسان باشند) لذا مرحلهی سوم را نیز به ۵ طریق میتوانیم انجام دهیم. پس بنا بر اصل ضرب، در $6\times 5\times 5=150$ کلمه حروف مجاور متمایزند.



ج) در این قسمت برای حرف اول، ۶ انتخاب وجود دارد. چون حرف اول و دوم نباید یکسان باشند، لذا برای حرف دوم، ۵ انتخاب وجود دارد و چون حرف سوم نباید با دو حرف دیگر کلمه برابر باشد، لذا برای حرف سوم، ۴ انتخاب وجود دارد. پس بنا بر اصل ضرب، در $6\times 5\times 4=120$ کلمه هر سه حرف متمایزند.



مسألهی (۷): چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام ۰، 1، 2، 3 و 4 میتوان نوشت؟

راه حل: توجه کنید وقتی در صورت سؤال شرطی برای متمایز بودن ارقام ذکر نکرده فرض بر این است که به کار بردن رقم تکراری مجاز است. چهار جایگاه در یک ردیف در نظر میگیریم. برای رقم هزارگان، ۴ انتخاب وجود دارد، زیرا هر یک از ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ را در این جایگاه میتوانیم قرار دهیم. برای هر یک از رقمهای صدگان و دهگان، ۵ انتخاب وجود دارد، زیرا هر یک از ۵ رقم داده شده را در این جایگاهها میتوانیم قرار دهیم و در نهایت برای رقم یکان، ۳ انتخاب وجود دارد، زیرا باید یکی از ارقام صفر، ۲ و ۴ را در این جایگاه قرار دهیم تا عدد حاصل زوج شود. نتیجه میگیریم پاسخ برابر $4\times5\times5\times3=300$ است.

④⑤⑤③

مسألهی (۸): چند عدد سه رقمی فرد با ارقام متمایز وجود دارد؟

راه حل: سه جایگاه در نظر میگیریم. چون رقم یکان باید فرد و رقم صدگان باید غیر صفر باشد، لذا ابتدا رقم یکان، سپس رقم صدگان و در نهایت رقم دهگان را مینویسیم.

○○○
۲ ۳ ۱

رقم یکان باید برابر ۱، ۳، ۵، ۷ یا ۹ باشد، لذا برای این رقم ۵ انتخاب وجود دارد. پس از نوشتن رقم یکان باید یکی از ارقام ۱ تا ۹ را غیر از رقمی که در مرتبهی یکان قرار گرفته در مرتبهی صدگان قرار دهیم، لذا برای رقم صدگان، ۸ انتخاب وجود دارد و در نهایت باید یکی از ارقام صفر تا ۹ را غیر از دو رقمی که در مرتبههای یکان و صدگان قرار گرفتهاند در مرتبهی دهگان قرار دهیم، لذا برای رقم دهگان، ۸ انتخاب وجود دارد. پس بنا بر اصل ضرب، $5\times8\times8=320$ عدد سه رقمی فرد با ارقام متمایز وجود دارد.

⑤⑧⑧
۲ ۳ ۱

مسألهی (۹): مجموعهی $X=\{1,2,3,4,5\}$ چند زیر مجموعه دارد؟

راه حل: برای ساخت یک زیر مجموعه از X باید برخی از اعضای X را سفید و بقیه را سیاه کنیم (سفید به معنای انتخاب و سیاه به معنای حذف است). مثلاً چنانچه همهی اعضا را سیاه کنیم، زیرمجموعهی $\varnothing$ و چنانچه اعضای ۲ و ۵ را سفید و بقیه را سیاه کنیم، زیرمجموعهی $\{2,5\}$ به دست میآید. لذا عمل ساخت یک زیرمجموعه از X را به ۵ مرحله تجزیه میکنیم. مرحلهی اول، تعیین رنگ عدد ۱، . . . و مرحلهی پنجم تعیین رنگ عدد ۵. چون هر یک از اعداد را مستقل از بقیه به ۲ طریق میتوانیم رنگ کنیم، لذا طبق اصل ضرب، به 2^5 طریق میتوانیم یک زیرمجموعه از X را بسازیم، پس X، 2^5 زیرمجموعه دارد.
در حالت کلی قضیهی زیر درست است.

قضیهی (۱): **یک مجموعهی n عضوی، 2^n زیر مجموعه دارد.**

مسألهی (۱۰): در چند زیر مجموعه از مجموعهی $X=\{1,2,...,10\}$ کوچکترین عضو برابر 3 و بزرگترین عضو برابر 9 است؟

راه حل: مشابه راه حل مسألهی قبل عمل ساخت یک زیرمجموعه از X را به ۱۰ مرحله تجزیه میکنیم. چون میخواهیم کوچکترین عضو زیر مجموعه برابر ۳ باشد، لذا اعداد ۱ و ۲ باید حذف شوند و عدد ۳ باید انتخاب شود و چون میخواهیم بزرگترین عضو زیرمجموعه برابر ۹ باشد، لذا عدد ۹ باید انتخاب و عدد ۱۰ باید حذف شود. هر یک از اعداد باقیمانده، یعنی اعداد ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ را میتوانیم انتخاب یا حذف کنیم. پس برای هر یک از اعداد ۱، ۲، ۳، ۹ و ۱۰، یک انتخاب و برای هر یک از ۵ عدد دیگر، ۲ انتخاب وجود دارد، لذا به 2^5 طریق میتوانیم زیرمجموعهای از X بسازیم که کوچکترین عضو آن برابر ۳ و بزرگترین عضو آن برابر ۹ باشد.

تست (۲): مجموعهی $A=\{1,2,3,...و20\}$ چند زیرمجموعهی ناتهی دارد که فقط شامل اعداد زوج باشد؟

۱) $2^{20}-10$ ۲) $2^{10}-20$ ۳) 2^{10} ٤) $2^{10}-1$

پاسخ: برای ساختن زیرمجموعهی موردنظر اعداد فرد را باید حذف کنیم، لذا برای هر یک از این اعداد، یک انتخاب وجود دارد. همچنین هر عدد زوج را میتوانیم انتخاب یا حذف کنیم، لذا برای هر یک از این اعداد، ۲ انتخاب وجود دارد، پس به 2^{10} طریق میتوانیم زیرمجموعهی موردنظر را بسازیم. فقط در یک حالت این زیرمجموعه برابر مجموعهی تهی میشود (حالتی که همهی اعضا حذف شوند). لذا پاسخ برابر $2^{10}-1$ است.
بنابراین گزینهی (۴) درست است.

مسألهی (۱۱): یک قطار با 20 مسافر در 3 ایستگاه توقف میکند. مسافرین این قطار به چند طریق میتوانند در این ایستگاهها پیاده شوند؟

راه حل: مسافرین قطار را به ترتیب با A_1، ... و A_{20} نامگذاری میکنیم. عمل پیاده شدن مسافرین را به ۲۰ مرحله تجزیه میکنیم. مرحلهی اول، تعیین ایستگاهی که A_1 پیاده میشود، ... و مرحلهی بیستم، تعیین ایستگاهی که A_{20} پیاده میشود. چون قطار در ۳ ایستگاه توقف میکند، لذا برای هر مسافر مستقل از بقیه ۳ انتخاب وجود دارد، پس هر یک از ۲۰ مرحله به ۳ طریق قابل انجاماند، لذا بنا بر اصل ضرب، مسافرین به 3^{20} طریق میتوانند در ایستگاهها پیاده شوند.

مسألهی (۱۲): به چند طریق میتوان 5 جایزهی مختلف را بین 20 دانشآموز یک کلاس تقسیم کرد بهطوری که به هیچ فردی بیش از یک جایزه نرسد؟

راه حل: چون جایزهها متمایزند، لذا آنها را به ترتیب با J_1، ... و J_5 نامگذاری میکنیم. عمل تقسیم جوایز را به ۵ مرحله تجزیه میکنیم. مرحلهی اول، توزیع J_1، ... و مرحلهی پنجم، توزیع J_5. جایزهی J_1 را باید به یکی از ۲۰ دانش آموز بدهیم، لذا برای J_1، ۲۰ انتخاب وجود دارد. پس از توزیع J_1، جایزهی J_2 باید به یکی از ۱۹ نفر باقیمانده برسد، لذا برای J_2، ۱۹ انتخاب وجود دارد. پس از توزیع J_1 و J_2، جایزهی J_3 را باید به یکی از ۱۸ نفر باقیمانده بدهیم، لذا برای J_3، ۱۸ انتخاب وجود دارد و به همین ترتیب برای J_4، ۱۷ و برای J_5، ۱۶ انتخاب وجود دارد. پس بنا بر اصل ضرب، به $16\times17\times18\times19\times20$ طریق میتوانیم جایزهها را توزیع کنیم بهطوری که به هیچ فردی بیش از یک جایزه نرسد.

مسألهی (۱۳): یک امتحان از 8 تست چهار گزینهای تشکیل شده است. یک دانشآموز به چند طریق میتواند به این سؤالات پاسخ دهد به طوری که:
الف) پاسخ دادن به هر تست الزامی باشد (یعنی از هر تست یکی از 4 گزینه را به عنوان پاسخ علامت بزند)؟
ب) پاسخ دادن به همهی تستها الزامی نباشد؟

راه حل: عمل پاسخ دادن به تستها را به ۸ مرحله تجزیه میکنیم. مرحلهی اول، پاسخ دادن به تست شمارهی ۱، ... و مرحلهی هشتم، پاسخ دادن به تست شمارهی ۸. در قسمت الف، هر یک از این ۸ مرحله به ۴ طریق قابل انجاماند، زیرا دانشآموز باید یکی از ۴ گزینهی هر تست را علامت بزند. پس پاسخ قسمت الف، برابر 4^8 است. در قسمت ب، هر یک از ۸ مرحله به ۵ طریق قابل انجاماند، زیرا علاوه بر اینکه دانشآموز میتواند یکی از ۴ گزینهی هر تست را علامت بزند، میتواند به این تست پاسخ ندهد. پس پاسخ قسمت ب، برابر 5^8 است.

تست (۳): با ارقام ۰، 1، 2، 3، 4، 5 و 6 چند عدد 4 رقمی مضرب 5 میتوان نوشت که با رقم 2 شروع شود؟

۱) 2×7^3 **۲)** 98 **۳)** 84 **٤)** 60

پاسخ: رقم سمت چپ عدد موردنظر برابر ۲ است، لذا برای این رقم یک انتخاب وجود دارد. رقم سمت راست نیز برابر ۰ یا ۵ است، لذا برای این رقم ۲ انتخاب وجود دارد. دو رقم میانی نیز برابر هر یک از ارقام ۰ تا ۶ میتوانند باشند؛ لذا برای هر یک از این دو رقم ۷ انتخاب وجود دارد، پس پاسخ برابر $1\times7\times7\times2=98$ است.
بنابراین گزینهی (۲) درست است.

تمرینهای بخش ۷-۱

۱- یک تاس را دو بار پرتاب کردهایم.
الف) چند حالت مختلف ممکن است پدید آید؟
ب) در چند حالت عددهای رو شده در دو پرتاب متمایزند؟

۲- 6 جاده به قلهی کوهی میروند. یک کوهنورد به چند طریق میتواند از یک جاده به قله برود و از جادهای دیگر پایین آید؟

۳- علی می خواهد برای دوست خود یک جعبهی مداد رنگی و یک دفتر نقاشی هدیه ببرد. فروشگاهی که علی برای خرید به آن مراجعه کرده 7 نوع مداد رنگی و 15 نوع دفترچه نقاشی دارد. او به چند طریق میتواند هدیهی دوست خود را تهیه کند؟

۴- چند عدد سه رقمی بر 5 بخش‌پذیرند؟

۵- چند عدد سه رقمی زوج با ارقام متمایز با ارقام 1، 2، 3، 4 و 5 می‌توان نوشت؟

۶- در صفحه‌ی شطرنجی 8×8 چند مربع 5×5 دیده می‌شود؟

۷- 20 نفر در یک تورنمنت کشتی شرکت کرده‌اند. برندگان مدال‌های طلا، نقره و برنز به چند طریق ممکن است مشخص شوند؟

۸- الف) با حروف a، b و c چند کلمه‌ی 5 حرفی می‌توان نوشت؟
ب) در چند کلمه حروف مجاور متمایزند؟

۹- در چند زیر مجموعه از مجموعه‌ی $\{1,2,...,10\}$
الف) عدد 5 وجود دارد؟
ب) عدد 5 وجود دارد ولی عدد 8 وجود ندارد؟

۱۰- در حیاط یک مدرسه 20 صندلی قرار داده شده است. می‌خواهیم هر یک از این صندلی‌ها را با یکی از 4 رنگ سبز، آبی، زرد و قرمز رنگ کنیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

۱۱- یک واگن 10 کوپه دارد. 4 مسافر را به چند طریق می‌توان در کوپه‌های این واگن توزیع کرد؟

۱۲- چند ماتریس 4×3 با درایه‌های ۰، 1 و 2 وجود دارد؟

۱۳- در چند عدد 4 رقمی، رقم‌های یکان و هزارگان برابرند و رقم‌های دهگان و صدگان برابر نیستند؟

۱۴- در یک همایش بین‌المللی 18 کشور و از هر کشور 7 نفر در این همایش شرکت کرده‌اند. قرار است یک کمیته‌ی ویژه شامل 18 عضو، یک نفر از هر کشور، تشکیل شود. به چند طریق می‌توان اعضای این کمیته را انتخاب کرد؟

۱۵- پس از ضرب، حاصل عبارت زیر چند جمله‌ی متمایز خواهد داشت؟

$$(a+b)(c+d+e+f)(g+h+i)$$

۱۶- الف) به چند طریق می‌توان سه مهره‌ی مختلف را در سه خانه از صفحه‌ی شطرنجی 8×8 قرار داد؟
ب) در چند حالت هیچ دو مهره‌ای در یک سطر قرار ندارند؟
ج) در چند حالت هیچ دو مهره‌ای در یک سطر یا یک ستون قرار ندارند؟