

فصل نهم: مثلثات

۲-۹ : اتحادهای مثلثاتی

سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل دو کمان

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

مثال: نسبت مثلثاتی $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ را به دست می‌آوریم:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

تست ۱: کمترین مقدار عبارت $P(x) = (\sin x + \cos 3x)^2 + (\sin 3x - \cos x)^2$ کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: عبارت را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$P(x) = 9 \sin^2 x + \cos^2 3x + 6 \sin x \cos 3x + \sin^2 3x + 9 \cos^2 x - 6 \sin 3x \cos x$$

$$= 9(\sin^2 x + \cos^2 x) + (\cos^2 3x + \sin^2 3x) + 6(\sin x \cos 3x - \cos x \sin 3x)$$

$$= 9 + 1 + 6 \sin(2x) = 10 - 6 \sin(2x)$$

کمترین مقدار عبارت به ازای $\sin 2x = 1$ اتفاق می‌افتد و برابر است با: ۴. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

نکته: عبارت $\sin x \pm \cos x$ را می‌توان بر حسب یک نسبت مثلثاتی نوشت:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

برای درک بهتر این روابط به اثبات $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ توجه کنید:

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right) = \sin x + \cos x$$

تست ۲: اگر $\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{13\pi}{12}$ آن‌گاه بیشترین مقدار عبارت $\cos x - \sin x$ کدام است؟

۴) صفر

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

۱ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

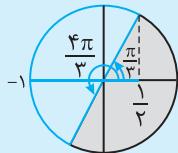
پاسخ: با توجه به $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{13\pi}{12} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{4\pi}{3}$$

به کمک دایره‌ی مثلثاتی رو به رو داریم:

$$-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.



۲ $\cos 40^\circ$ (۴)۲ $\cos 20^\circ$ (۳)تست ۳: حاصل $A = \sqrt{3} \cos 70^\circ + \sin 70^\circ$ کدام است؟۱) $\cos 40^\circ$ پاسخ: عبارت داده شده را طوری می‌نویسیم که $\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و ایجاد شود:

$$\begin{aligned} A &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 70^\circ + \frac{1}{2} \sin 70^\circ\right) = 2(\sin 60^\circ \cos 70^\circ + \cos 60^\circ \sin 70^\circ) = 2 \sin(60^\circ + 70^\circ) = 2 \sin 130^\circ \\ &= 2 \sin(90^\circ + 40^\circ) = 2 \cos 40^\circ \end{aligned}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

تائزانت مجموع و تفاضل دو کمان

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}, \quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

تذکر: مشخص است که به خاطر سپردن بسطهای $\cot(\alpha \pm \beta)$ ضرورتی ندارد، مثلًاً:

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{1}{\tan(\alpha+\beta)} = \frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

مثال: نسبت مثلثاتی (15°) $\tan(15^\circ)$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan(15^\circ) = \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

تست ۴: اگر $\cot b$ حاصل $\tan(a+\frac{b}{2}) = 3$ و $\tan(a-\frac{b}{2}) = 2$ کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: به کمک کمان $b = a + \frac{b}{2}$ و $a = a - \frac{b}{2}$ می‌توانیم کمان b را تشکیل دهیم:

$$b = \beta - \alpha \Rightarrow \tan b = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{3 - 2}{1 + 3 \times 2} = \frac{1}{7} \Rightarrow \cot b = 7$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

مثال: به سادگی می‌توانیم عبارتی نظری $\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$ و $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$ را بر حسب تائزانت یک کمان بنویسیم:

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right), \quad \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

تست ۵: اگر $\tan(10^\circ - \alpha)$ ، $\cot(\alpha + 35^\circ)$ چقدر است؟۱) $\frac{1}{4}$ (۴)۲) $\frac{1}{3}$ (۳)۳) $\frac{1}{2}$ (۲)۴) $\frac{1}{3}$ (۱)پاسخ: با توجه به $\tan(\alpha + 35^\circ) = \frac{1}{2}$ داریم: $\tan(10^\circ - \alpha) = \tan(45^\circ - (\alpha + 35^\circ)) = \frac{\tan 45^\circ - \tan(\alpha + 35^\circ)}{1 + \tan 45^\circ \tan(\alpha + 35^\circ)} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۶: حاصل $\tan \gamma^\circ + \tan 53^\circ + \sqrt{3} \tan \gamma^\circ \tan 53^\circ$ کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱)

پاسخ: با توجه به وجود عبارت $\tan \gamma^\circ + \tan 53^\circ$ و $\tan \gamma^\circ \tan 53^\circ$ ، از بسط $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ کمک می‌گیریم:

$$\tan(53^\circ + \gamma^\circ) = \frac{\tan 53^\circ + \tan \gamma^\circ}{1 - \tan 53^\circ \tan \gamma^\circ} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\tan 53^\circ + \tan \gamma^\circ}{1 - \tan 53^\circ \tan \gamma^\circ} \Rightarrow \tan 53^\circ + \tan \gamma^\circ + \sqrt{3} \tan 53^\circ \tan \gamma^\circ = \sqrt{3}$$

بنابراین گزینه (۴) درست است.

نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان

با قرار دادن $\alpha = \beta$ در هر یک از بسطهای $\tan(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$ به اتحادهای مهم زیر می‌رسیم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

مثال: اگر $\cos 2\theta, \sin 2\theta$ را به دست می‌آوریم، حاصل $\cos \theta = \frac{4}{5}$ و $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ است:

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \pm \frac{3}{5} \xrightarrow{\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi} \sin \theta = -\frac{3}{5}$$

$$\begin{cases} \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \left(-\frac{3}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25} \\ \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \left(\frac{16}{25}\right) - 1 = \frac{7}{25} \end{cases}$$

تست ۷: مقدار عددی $B = \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$ کدام است؟

$\frac{\tan(80^\circ)}{8}$ (۴)

$\frac{\tan(40^\circ)}{4}$ (۳)

$\frac{\cot(40^\circ)}{4}$ (۲)

$\frac{\cot(80^\circ)}{8}$ (۱)

پاسخ: با ضرب و تقسیم کردن $\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 40^\circ$ از اتحاد $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ به طور متواتی استفاده می‌کنیم:

$$B = \frac{(\sin 10^\circ \cos 10^\circ) \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{1}{2} \frac{(\sin 20^\circ \cos 20^\circ) \cos 40^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{1}{4} \frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{1}{8} \frac{\sin 80^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{1}{8} \frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} = \frac{\tan 80^\circ}{8}$$

بنابراین گزینه (۴) درست است.

مثال: می‌خواهیم هر یک از عبارات $\sin^6 x + \cos^6 x$, $\sin^4 x + \cos^4 x$, $\sin^2 x + \cos^2 x$ را بر حسب $\sin 2x$ نمایش دهیم. برای این کار از اتحادهای $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ و $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{4}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}$$

$$= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

تذکرہ با توجه به بسط $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$, این اتحاد را می‌توان به صورت مهم دیگری نیز نوشت:

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha \quad , \quad 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$$

مثال: به اتحادهای زیر توجه کنید:

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}\sin^2 \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}\cos^2 \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}} = \tan^2 \frac{x}{2}$$

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}\cos^2 \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

تست ۸: حاصل $A = \frac{1 + \sin 20^\circ - \cos 20^\circ}{1 + \sin 20^\circ + \cos 20^\circ}$ کدام است؟

$\tan 25^\circ$ (۴)

$\tan 20^\circ$ (۳)

$\tan 5^\circ$ (۲)

$\tan 10^\circ$ (۱)

پاسخ: با توجه به $1 + \cos 20^\circ = 2\cos^2 10^\circ$ و $1 - \cos 20^\circ = 2\sin^2 10^\circ$ داریم:

$$A = \frac{1 + \sin 20^\circ + \sin 20^\circ}{2\cos^2 10^\circ + \sin 20^\circ} = \frac{1 + \sin 20^\circ + 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{2\cos^2 10^\circ + 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{1 + \sin 20^\circ + \sin 20^\circ}{2\cos 10^\circ (\cos 10^\circ + \sin 10^\circ)} = \tan 10^\circ.$$

بنابراین گزینه (۱) درست است.

تست ۹: اگر $\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x} = \frac{3}{2}$ و $0 < x < \frac{\pi}{4}$, حاصل $\cos 2x$ برابر است با:

$\frac{1}{4}$ (۴)

$-\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{8}$ (۲)

$-\frac{1}{8}$ (۱)

پاسخ: عبارات $\sqrt{1 + \sin 2x}$ و $\sqrt{1 - \sin 2x}$ را به صورت مربع دوجمله‌ای نوشتہ تا عبارات رادیکالی ساده شوند:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x} &= \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x} + \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x} \\ &= \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} + \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = |\sin x + \cos x| + |\sin x - \cos x| \end{aligned}$$

با توجه به $0 < x < \frac{\pi}{4}$ داریم:

$$|\sin x + \cos x| = \sin x + \cos x \quad \text{and} \quad |\sin x - \cos x| = \cos x - \sin x = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{8}$$

بنابراین گزینه (۲) درست است.

نسبت‌های مثلثاتی سه برابر کمان

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

تست ۱۰: مقدار $B = (\sin^2 \frac{\pi}{10} - 3)(\sin^2 \frac{3\pi}{10} - 3)$ برابر است با:

(۱) ۴

-۱ (۳)

 $\cot \frac{\pi}{10}$ (۲) $-\cot \frac{\pi}{10}$ (۱)

پاسخ: با توجه به اتحاد $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - \sin^3 \alpha$ داریم:

$$B = (3 - \sin^2 \frac{\pi}{10})(3 - \sin^2 \frac{3\pi}{10}) = \frac{3 \sin \frac{\pi}{10} - \sin^3 \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{10}} \times \frac{3 \sin \frac{3\pi}{10} - \sin^3 \frac{3\pi}{10}}{\sin \frac{3\pi}{10}} = \frac{\sin \frac{3\pi}{10} \sin \frac{9\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{10}}$$

$$B = \frac{\sin \frac{9\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{10}} = \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{10})}{\sin \frac{\pi}{10}} = \frac{\sin \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{10}} = 1$$

در نتیجه خواهیم داشت:

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

چند اتحاد مهم

$$\begin{cases} \cot x - \tan x = 2 \cot 2x \\ \cot x + \tan x = \frac{2}{\sin 2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \\ \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \end{cases}$$

مثال: به کمک اتحاد $\tan \frac{\pi}{8} = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$, مقدار $\sin 2x$ را که عددی بین صفر و یک است, به دست می‌آوریم:

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 + \tan^2 \frac{\pi}{8}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 + \tan^2 \frac{\pi}{8}} \Rightarrow \sqrt{2} \tan^2 \frac{\pi}{8} - 4 \tan \frac{\pi}{8} + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 \\ \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

بنابراین $\tan \frac{\pi}{8}$ برابر است با $\sqrt{2} - 1$.

تست ۱۱: حاصل $A = \tan 10^\circ + 2 \tan 20^\circ + 4 \cot 40^\circ$ کدام است؟

(۱) $\tan 80^\circ$ (۲) $\tan 70^\circ$ (۳) $\tan 60^\circ$ (۴) $\tan 30^\circ$

پاسخ: به کمک اتحاد $2 \cot 40^\circ = \cot 20^\circ - \tan 20^\circ$, به جای $2 \cot 40^\circ$ معادل آن یعنی $\cot 20^\circ - \tan 20^\circ$ را جایگزین می‌کنیم:
 $A = \tan 10^\circ + 2 \tan 20^\circ + 2(\cot 20^\circ - \tan 20^\circ) = \tan 10^\circ + 2 \cot 20^\circ$

$$A = \tan 10^\circ + (\cot 10^\circ - \tan 10^\circ) = \cot 10^\circ = \tan 80^\circ$$

مجدداً از اتحاد بالا استفاده می‌کنیم:

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

روابط تبدیل جمع به ضرب

$$\begin{cases} \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{cases}$$

مثال: عبارت‌های زیر را به ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$\cos \alpha x + \cos 3x = 2 \cos \frac{\alpha x + 3x}{2} \cos \frac{\alpha x - 3x}{2} = 2 \cos 4x \cos x$$

$$\sin 3x - \sin 7x = 2 \sin \frac{3x - 7x}{2} \cos \frac{3x + 7x}{2} = 2 \sin(-2x) \cos 5x = -2 \sin 2x \cos 5x$$

$$1 + 2 \sin x = 2\left(\frac{1}{2} + \sin x\right) = 2\left(\sin \frac{\pi}{6} + \sin x\right) = 2 \sin\left(\frac{x + \pi}{2}\right) \cos\left(\frac{x - \pi}{2}\right)$$

تست ۱۲: حاصل $\cos 1^\circ - \cos 5^\circ + \cos 7^\circ$ کدام است؟

۴ $\sin 20^\circ$ (۴)

۲ $\sin 20^\circ$ (۳)

۴ $\cos 20^\circ$ (۲)

۲ $\cos 20^\circ$ (۱)

پاسخ: به کمک رابطه $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$ داریم:

$$(\cos 1^\circ - \cos 5^\circ) + \cos 7^\circ = -2 \sin 3^\circ \sin(-2^\circ) + \cos 7^\circ = \sin 2^\circ + \cos 7^\circ = \sin 2^\circ + \sin 2^\circ = 2 \sin 2^\circ$$

بنابراین گزینه (۳) درست است.

تست ۱۳: حاصل عبارت $B = \frac{\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 9x}{\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x}$ کدام است؟

$\frac{1}{2} \tan 6x$ (۴)

$\frac{1}{2} \tan 3x$ (۳)

$\tan 6x$ (۲)

$\tan 3x$ (۱)

پاسخ: هم در صورت کسر و هم در مخرج، مجموع جملات اول و آخر و مجموع دو جمله‌ی وسط را به ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$B = \frac{2 \sin 6x \cos 3x + 2 \sin 6x \cos x}{2 \cos 6x \cos 3x + 2 \cos 6x \cos x} = \frac{2 \sin 6x (\cos 3x + \cos x)}{2 \cos 6x (\cos 3x + \cos x)} = \tan 6x$$

بنابراین گزینه (۲) درست است.

تست ۱۴: حاصل عبارت $\frac{1}{\sin 54^\circ} - \frac{1}{\sin 18^\circ}$ برابر است با:

-۱ (۴)

$-\frac{5}{2}$ (۳)

-۲ (۲)

$-\frac{3}{2}$ (۱)

پاسخ: ابتدا مخرج مشترک گرفته و سپس از روابط تبدیل جمع به ضرب استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin 18^\circ - \sin 54^\circ}{\sin 54^\circ \sin 18^\circ} = \frac{2 \sin(-18^\circ) \cos 36^\circ}{\sin 54^\circ \sin 18^\circ} = -2 \frac{\cos 36^\circ}{\sin 54^\circ} = -2 \frac{\cos 36^\circ}{\cos 36^\circ} = -2$$

بنابراین گزینه (۲) درست است.

مثال: می‌خواهیم عبارات $\sin^2 a - \cos^2 b$ و $\sin^2 a - \sin^2 b$ را به ضرب تبدیل کنیم:

$$\sin^2 a - \sin^2 b = \frac{1 - \cos 2a}{2} - \frac{1 - \cos 2b}{2} = \frac{\cos 2b - \cos 2a}{2} = \frac{-2 \sin(b+a) \sin(b-a)}{2} = \sin(a-b) \sin(a+b)$$

$$\sin^2 a - \cos^2 b = \frac{1 - \cos 2a}{2} - \frac{1 + \cos 2b}{2} = \frac{(\cos 2a + \cos 2b)}{2} = \frac{-2 \cos(a+b) \cos(a-b)}{2} = -\cos(a-b) \cos(a+b)$$

تذکر: هریک از عبارات $\cot A \pm \cot B$ و $\tan A \pm \tan B$ را به راحتی می‌توان به ضرب تبدیل کرد. به عنوان نمونه به دو مورد آن:

توجه کنید:

$$\tan A + \tan B = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B} = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}$$

$$\cot A - \cot B = \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\sin B \cos A - \cos B \sin A}{\sin A \sin B} = \frac{\sin(B-A)}{\sin A \sin B}$$

تست ۱۵: ساده شدهی عبارت $\cos ۵۰^\circ (\tan ۷۰^\circ + \tan ۱۰^\circ)$ برابر کدام است؟

$$\sqrt{2} \cos ۲۰^\circ \quad (۴)$$

$$\sqrt{2} \sin ۲۰^\circ \quad (۳)$$

$$\cos ۲۰^\circ \quad (۲)$$

$$\sin ۲۰^\circ \quad (۱)$$

پاسخ: ابتدا عبارت $\tan ۷۰^\circ + \tan ۱۰^\circ$ را به ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$\cos ۵۰^\circ \left(\frac{\sin ۷۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ} + \frac{\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ} \right) = \cos ۵۰^\circ \frac{\sin(۷۰^\circ + ۱۰^\circ)}{\cos ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ} = \cos ۵۰^\circ \frac{\sin ۸۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ}$$

با توجه به برابری $\sin ۸۰^\circ = \cos ۱۰^\circ$ داریم:

$$\cos ۵۰^\circ \frac{\sin ۸۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ} = \frac{\cos ۵۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ} = \frac{\sin ۴۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ} = \frac{۲ \sin ۲۰^\circ \cos ۲۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ} = ۲ \cos ۲۰^\circ$$

بنابراین گزینهی (۴) درست است.

تست ۱۶: در مثلثی رابطه‌های $\sin B + \sin C = \sqrt{2} \sin A$ و $B - C = ۹۰^\circ$ بین زوایای آن برقرار است. کوچک‌ترین زاویهی مثلث چند درجه است؟

$$۶۰ \quad (۴)$$

$$۴۵ \quad (۳)$$

$$۳۰ \quad (۲)$$

$$۱۵ \quad (۱)$$

پاسخ: به کمک روابط تبدیل جمع به ضرب داریم:

$$\sqrt{2} \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \sqrt{2} \sin A \Rightarrow \sqrt{2} \sin \frac{B+C}{2} \cos ۴۵^\circ = \sqrt{2} \sin A \Rightarrow \sin \frac{B+C}{2} = \sin A$$

از طرفی $A = \pi - (B+C)$ پس داریم:

$$\begin{aligned} \sin \frac{B+C}{2} &= \sin(\pi - (B+C)) = \sin(B+C) \Rightarrow \sin \frac{B+C}{2} = \sqrt{2} \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B+C}{2} \\ \Rightarrow \cos \frac{B+C}{2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow B+C=۱۲۰^\circ \end{aligned}$$

از حل دستگاه معادلات $B+C=۱۲۰^\circ$ و $B-C=۹۰^\circ$ ، به دست می‌آید $B=۱۰۵^\circ$ و $C=۱۵^\circ$ و در نتیجه: $A=۶۰^\circ$

بنابراین گزینهی (۱) درست است.

روابط تبدیل ضرب به جمع

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \\ \sqrt{2} \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) \\ \sqrt{2} \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \end{cases}$$

مثال: ● به کمک روابط تبدیل ضرب به جمع، حاصل $\cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{7\pi}{24}$ را به دست می‌آوریم:

$$\cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{7\pi}{24} = \frac{1}{2} (\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{7\pi}{24}) = \frac{1}{2} (\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2+1}}{4}$$

● به کمک روابط تبدیل ضرب به جمع درستی رابطه‌ی $\sqrt{2} \sin \alpha \sin(\alpha - ۶۰^\circ) \sin(\alpha + ۶۰^\circ) = \sin ۳\alpha$ را نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin \alpha \times \sqrt{2} \sin(\alpha - ۶۰^\circ) \sin(\alpha + ۶۰^\circ) &= 2 \sin \alpha (\cos(-2\alpha) - \cos ۱۲۰^\circ) = 2 \sin \alpha \cos ۲\alpha + \sin \alpha \\ &= \sin ۳\alpha + \sin(-\alpha) + \sin \alpha = \sin ۳\alpha \end{aligned}$$

تست ۱۷: حاصل عبارت $\sin 20^\circ \sin 40^\circ + \cos^2 80^\circ$ برابر کدام گزینه است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\sin 70^\circ \quad (2)$$

$$\cos 10^\circ \quad (1)$$

پاسخ: به کمک روابط تبدیل ضرب به جمع داریم:

$$\frac{1}{2}(2\sin 20^\circ \sin 40^\circ) + \cos^2 80^\circ = \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) + \frac{1+\cos 160^\circ}{2} = \frac{\cos 20^\circ}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\cos 160^\circ}{2}$$

با توجه به قرینه بودن مقادیر $\cos 20^\circ$ و $\cos 160^\circ$, حاصل عبارت برابر است با $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. بنابراین گزینه (3) درست است.

تست ۱۸: اگر $2A \sin 5^\circ$ کدام است؟ $A = \sin 35^\circ + \sin 45^\circ + \dots + \sin 85^\circ$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

پاسخ: برای محاسبه $2A \sin 5^\circ$ از روابط تبدیل ضرب به جمع استفاده می‌کنیم:

$$2A \sin 5^\circ = 2 \sin 5^\circ \sin 35^\circ + 2 \sin 5^\circ \sin 45^\circ + \dots + 2 \sin 5^\circ \sin 85^\circ$$

$$= (\cos 30^\circ - \cos 40^\circ) + (\cos 40^\circ - \cos 50^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 90^\circ)$$

$$= \cos 30^\circ - \cos 90^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین گزینه (3) درست است.

نکته: برای ساده کردن عباراتی نظیر $\cos x + \cos(x+\alpha) + \dots + \cos(x+n\alpha)$ و $\sin x + \sin(x+\alpha) + \dots + \sin(x+n\alpha)$ که در آنها کمان سینوس یا کسینوس، دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت α می‌سازد، می‌توانیم عبارت خواسته شده را در $2 \sin \frac{\alpha}{2}$ ضرب و تقسیم کرده و سپس از روابط تبدیل ضرب به جمع استفاده کنیم.

تست ۱۹: حاصل $A = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$ کدام است؟

$$-\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

پاسخ: کمان‌ها یعنی $\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$ و $\frac{6\pi}{7}$, دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ ایجاد کرده‌اند. پس عبارت خواسته شده را در

ضرب و تقسیم کرده و از روابط تبدیل ضرب به جمع استفاده می‌کنیم:

$$A = \frac{2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{(\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7}) + (\sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7}) + (\sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7})}{2 \sin \frac{\pi}{7}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sin \pi - \sin \frac{\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{-\sin \frac{\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه (3) درست است.