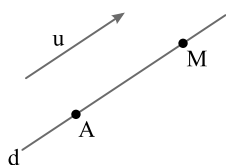


فصل دوم: معادله‌ی خط و صفحه در فضا

بخش اول: معادلات خط در فضا

درسنامه

معادلات پارامتری خط d که از نقطه‌ی $A = (x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد و موازی بردار $u = (a, b, c)$ است، به صورت زیر نوشته می‌شود:



$$d: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

که در آن $t \in \mathbb{R}$ در این وضعیت u را بردار هادی خط می‌نامند.

نکته: ۱- هر مضرب غیرصفری از بردار هادی را نیز می‌توان بردار هادی در نظر گرفت. به بیان دیگر بردار هادی u فقط امتداد خط d را مشخص می‌کند و اندازه و جهت آن اهمیتی ندارد.

۲- اگر در معادله‌ی پارامتری خط a, b, c هر سه غیرصفر باشند، می‌توان معادله را به صورت $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ نوشت. به

این صورت به معادله‌ی خط، اصطلاحاً معادله‌ی متقارن گفته می‌شود.

تست ۱: معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A = (1, -2, 5)$ می‌گذرد و موازی با بردار $u = (2, 3, -1)$ می‌باشد، کدام است؟

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = -t + 5 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t + 3 \\ z = 5t + 1 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = -t + 5 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = -t + 5 \end{cases} \quad (4)$$

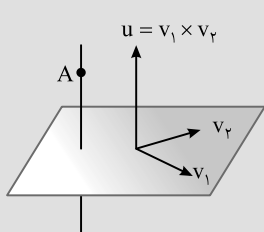
پاسخ: گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۲: خطی که از نقطه‌ی $A = (3, 2, -5)$ می‌گذرد و بر دو بردار $v_1 = (1, 1, 2)$ و $v_2 = (2, 3, -1)$ عمود است، صفحه‌ی xOy را

در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

$$(1) (-2, 3, 0) \quad (2) (32, 27, 0) \quad (3) (-27, 11, 0) \quad (4) (-32, 27, 0)$$

پاسخ: خطی که بر دو بردار v_1 و v_2 عمود است با بردار $v_1 \times v_2$ موازی خواهد بود. بنابراین می‌توان نوشت:



$$u = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-7, 5, 1) \Rightarrow \text{معادله‌ی خط: } \begin{cases} x = -7t + 3 \\ y = 5t + 2 \\ z = t - 5 \end{cases}$$

برای یافتن محل برخورد این خط با صفحه کافی است قرار دهیم $z = 0$ ، بنابراین:

$$z = t - 5 = 0 \Rightarrow t = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = -32 \\ y = 27 \end{cases} \Rightarrow M(-32, 27, 0)$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

نکته: ۱- دو خط d_1 و d_2 موازیند اگر بردارهای هادی آنها موازی باشند $(u_1 \parallel u_2)$.

۲- دو خط d_1 و d_2 متعامدند اگر بردارهای هادی آنها متعامد باشند $(u_1 \cdot u_2 = 0)$.

دقت کنید که ممکن است دو خط بر هم عمود باشند ولی متقاطع نباشند. به عبارت دیگر برای متعامد بودن دو خط، عمود بودن بردارهای هادی آنها کافی است.

تست ۳: خطی که طول از مبدأ آن ۴ و با خط $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 1-z$ موازی است، صفحه‌ی yOz را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

- (۱) $(-6, 0, 2)$ (۲) $(0, -6, 2)$ (۳) $(0, 6, -2)$ (۴) $(6, 0, -2)$

پاسخ: ابتدا معادله‌ی خط d را به صورت پارامتری می‌نویسیم:

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 1-z = t \Rightarrow \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3t \\ z = -t+1 \end{cases} \Rightarrow \text{بردار هادی } u = (2, 3, -1)$$

چون دو خط موازیند پس u بردار هادی خط موردنظر نیز می‌باشد، چون طول از مبدأ خط موردنظر ۴ است، پس از نقطه‌ی $A(4, 0, 0)$ می‌گذرد. بنابراین داریم:

$$d': \begin{cases} x = 2t+4 \\ y = 3t+0 \\ z = -t+0 \end{cases}$$

برای به‌دست آوردن محل برخورد خط d' با صفحه‌ی yOz کافی است در معادله‌ی آن قرار دهیم $x=0$ بنابراین:

$$d': \begin{cases} x = 2t+4 \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases} \xrightarrow{x=0} 2t+4=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-6 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow M(0, -6, 2)$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۴: خطی که از نقطه‌ی $A=(1, 4, -1)$ می‌گذرد و عمود بر دو خط به معادلات $d_1: x=y=z$ و $d_2: 1-x=2y-1=z$ است،

صفحه‌ی xOz را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

- (۱) $(1, 0, 3)$ (۲) $(2, 0, 4)$ (۳) $(2, 0, 2)$ (۴) $(1, 0, -1)$

پاسخ: چون خط موردنظر بر دو خط d_1 و d_2 عمود است، پس بردار هادی آن برابر است با ضرب خارجی بردارهای هادی این دو خط داریم:

$$d_1: x=y=z=t \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow u_1 = (1, 1, 1) \quad , \quad d_2: 1-x=2y-1=z=t \Rightarrow \begin{cases} x=-t+1 \\ y=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \\ z=t \end{cases} \Rightarrow u_2 = (-1, \frac{1}{2}, 1)$$

با توجه به این که هر مضرب غیر صفری از بردار هادی را نیز می‌توان به عنوان بردار هادی در نظر گرفت، پس برای راحتی کار بردار u_2 را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم.

$$u_2 = (-2, 1, 2) \xrightarrow{u = u_1 \times u_2} u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1, -4, 3) \Rightarrow \text{معادله‌ی خط } d: \begin{cases} x=t+1 \\ y=-4t+4 \\ z=3t-1 \end{cases}$$

برای به‌دست آوردن محل برخورد خط d با صفحه‌ی xOz کافی است در معادله‌ی آن قرار دهیم $y=0$ ، داریم:

$$y=0 \Rightarrow -4t+4=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow M(2, 0, 2)$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

بخش اول: معادلات خط در فضا

تعداد سؤالات: ۲۵

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- معادلات پارامتری خط گذرا از نقطه‌ی $A = (3, 5, -1)$ و موازی با بردار $u = 2i + 3j + 7k$ کدام است؟

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 3t - 5 \\ z = 7t + 1 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 5t - 3 \\ z = -t - 7 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 3t + 5 \\ z = 7t - 1 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 5t + 3 \\ z = -t + 7 \end{cases} \quad (1)$$

۲- معادلات پارامتری خط گذرا از نقطه‌ی $A = (0, 2, 5)$ و موازی با بردار $u = -2i + j - 3k$ کدام است؟

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2t + 1 \\ z = 5t - 3 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} x = 4t \\ y = -2t + 2 \\ z = 6t + 5 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = t + 2 \\ z = -3t + 5 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x = -2t \\ y = t - 2 \\ z = -3t + 5 \end{cases} \quad (1)$$

۳- معادلات پارامتری خط d به صورت $x = t + 3$, $y = -2t + 1$ و $z = 3t - 6$ است. فرض کنید A نقطه‌ی تقاطع خط d و صفحه‌ی xy باشد. مجموع مختصات A برابر کدام است؟

$$(1) \quad 2 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad 6 \quad (4) \quad 8$$

۴- معادلات پارامتری خط گذرا از نقطه‌ی $A = (1, 1, 2)$ و موازی با بردار $u = i + 3k$ کدام است؟

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 1 \\ z = 3t - 2 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = 2t + 3 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x = t + 3 \\ y = 1 \\ z = 3t + 8 \end{cases} \quad (1)$$

۵- معادلات خطی که از نقطه‌ی $A = (2, 1, 4)$ می‌گذرد و با بردار $u = 3i - j + 2k$ موازی است، کدام است؟

$$\frac{x-2}{3} = -y-1 = \frac{z+4}{2} \quad (4) \quad \frac{x-3}{2} = y+1 = z-2 \quad (3) \quad \frac{x-2}{3} = 1-y = \frac{z-4}{2} \quad (2) \quad \frac{x-2}{3} = y-1 = z-4 \quad (1)$$

۶- معادلات خطی که از نقطه‌ی $A = (5, 0, 2)$ می‌گذرد و با بردار $u = 2i - k$ موازی است، کدام است؟

$$y=0, \frac{x-5}{2} = 2-z \quad (4) \quad y=0, \frac{x-5}{2} = z-2 \quad (3) \quad y=0, \frac{x+5}{2} = -z-2 \quad (2) \quad y=0, \frac{x-2}{5} = \frac{z+1}{2} \quad (1)$$

۷- معادلات خطی که از نقطه‌ی $A = (3, 7, -1)$ می‌گذرد و با بردار $u = 5j$ موازی است، کدام است؟

$$z=-1, y=5 \quad (4) \quad x=3, y=5 \quad (3) \quad x=3, y=7 \quad (2) \quad x=3, z=-1 \quad (1)$$

۸- معادلات خط گذرا از نقاط $A = (2, -1, 3)$ و $B = (1, 4, 2)$ کدام است؟

$$x-1 = \frac{y-4}{5} = z-2 \quad (4) \quad x-2 = \frac{y-1}{-5} = z-3 \quad (3) \quad x-1 = \frac{y-4}{-5} = z-2 \quad (2) \quad x-2 = \frac{y+1}{5} = z-3 \quad (1)$$

۹- فرض کنید خط گذرا از نقاط $A = (2, 4, 5)$ و $B = (6, 4, -1)$ صفحه‌ی yz را در نقطه‌ی C قطع کند. مجموع مختصات نقطه‌ی C برابر کدام است؟

$$14 \quad (4) \quad 13 \quad (3) \quad 12 \quad (2) \quad 11 \quad (1)$$

۱۰- خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(-1, 2, 1)$ و $B(2, 1, -1)$ از کدام نقطه به مختصات زیر می‌گذرد؟

$$(4, 0, -2) \quad (4) \quad (4, 0, -3) \quad (3) \quad (5, 0, -2) \quad (2) \quad (5, 0, -3) \quad (1)$$

۱۱- خط گذرا بر دو نقطه‌ی $A(2, -1, 1)$ و $B(2, 3, -1)$ صفحه‌ی xOy را در نقطه‌ی P قطع می‌کند. فاصله P تا مبدأ مختصات کدام است؟

$$\sqrt{10} \quad (4) \quad 2\sqrt{2} \quad (3) \quad \sqrt{5} \quad (2) \quad \sqrt{2} \quad (1)$$

۱۲- فرض کنید خط $x+2 = \frac{y-4}{a} = \frac{z-b}{3}$ از مبدأ مختصات بگذرد. حاصل $a+b$ برابر کدام است؟

$$8 \quad (4) \quad 4 \quad (3) \quad -4 \quad (2) \quad -8 \quad (1)$$

- ۱۳- فرض کنید d خطی به معادلات $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+1}{3}$ باشد. کدام گزینه درست است؟
 (۱) محور x را قطع می‌کند. (۲) محور y را قطع می‌کند.
 (۳) محور z را قطع می‌کند. (۴) هیچ‌یک از سه محور را قطع نمی‌کند.
- ۱۴- کدام خط بر خط $x=2y=3z$ عمود است؟
 (۱) $x=2y=-3z$ (۲) $3x=2y=z$ (۳) $x=\frac{y}{2}=-\frac{z}{3}$ (۴) $x=\frac{y}{2}=-\frac{z}{6}$
- ۱۵- فرض کنید d خطی به معادلات $\frac{x+1}{4} = y-2$, $z=5$ باشد. کدام گزینه درست است؟
 (۱) d با محور z موازی است. (۲) d بر محور z عمود است. (۳) d محور z را قطع می‌کند. (۴) d روی صفحه‌ی xy قرار دارد.
- ۱۶- معادلات خطی که از نقطه‌ی $A=(3, 1, 2)$ گذشته و بر خط‌های $x=1, y+1=\frac{z+2}{3}$ و $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{5} = z$ عمود می‌باشد، کدام است؟
 (۱) $\frac{x-3}{7} = \frac{y-1}{3} = z-2$ (۲) $\frac{x-3}{-14} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{3}$ (۳) $\frac{x-3}{7} = \frac{y-1}{-3} = z-2$ (۴) $\frac{x-3}{14} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{-3}$
- ۱۷- فرض کنید d خطی موازی با محور z باشد و خطوط $x=y=z$ و $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = z-2$ را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند. طول پاره‌خط AB برابر کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۱۸- فرض کنید d خطی گذرا از نقطه‌ی $A=(1, -1, 2)$ باشد و خطوط $x=2, y=z+1$ و $y=2, z=1$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع کند. نقطه‌ی B کدام است؟
 (۱) $(0, 2, 1)$ (۲) $(1, 2, 1)$ (۳) $(2, 2, 1)$ (۴) $(3, 2, 1)$
- ۱۹- فرض کنید نقطه‌ی A روی خط $\frac{x}{2} = y+1 = 2z$ قرار داشته باشد و از نقاط $(2, 3, 5)$ و $(0, -1, 3)$ به یک فاصله باشد. مجموع مختصات نقطه‌ی A چند است؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸
- ۲۰- فرض کنید A نقطه‌ای روی خط $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ باشد که فاصله‌ی آن از محور x برابر فاصله‌اش از صفحه‌ی yz است. عرض نقطه‌ی A کدام می‌تواند باشد؟
 (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۱
- ۲۱- معادلات خطی که از نقطه‌ی $A=(1, 1, 2)$ بگذرد، بر بردار $u=2i+j-k$ عمود باشد و خط $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{3}$ را قطع کند، کدام است؟
 (۱) $x-1=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{4}$ (۲) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{8}$ (۳) $x-1=y-1=\frac{z-2}{3}$ (۴) $\frac{x-1}{3}=1-y=\frac{z-2}{5}$
- ۲۲- معادله خطی که عمود بر محور Ox و خط $x=y=z$ بوده و از نقطه‌ی $A=(1, 2, -1)$ می‌گذرد، کدام است؟
 (۱) $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} x=1 \\ y+z=1 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} x=2 \\ y=z \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} x=1 \\ y=-z \end{cases}$
- ۲۳- خطی که موازی صفحه‌ی xOy و عمود بر خط $3-x=2y-1=z$ بوده و از نقطه‌ی $A=(3, 4, -5)$ می‌گذرد، صفحه‌ی yOz را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟
 (۱) $(3, 1, 1)$ (۲) $(0, 2, 1)$ (۳) $(0, 2, -5)$ (۴) $(0, -2, -5)$
- ۲۴- خطی که از نقطه‌ی $A=(4, 0, 3)$ می‌گذرد و بر خط $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z-2$ عمود و متقاطع است، صفحه‌ی xOz را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟
 (۱) $(0, 2, 3)$ (۲) $(0, 3, 4)$ (۳) $(4, 0, 3)$ (۴) $(3, 0, 2)$
- ۲۵- معادلات خط گذرا از نقطه‌ی $A=(1, 2, 8)$ که بر خط $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$ عمود بوده و این خط را قطع کند، کدام است؟
 (۱) $\frac{x-1}{2} = 2-y = 8-z$ (۲) $\frac{x-1}{4} = y-2 = \frac{z-8}{-3}$ (۳) $y=2, \frac{x-1}{3} = \frac{z-8}{-2}$ (۴) $x-1=y-2=8-z$

بخش اول: معادلات خط در فضا

خودآزمایی ۱

۱- راستای خط $\frac{3x+1}{2} = \frac{1-y}{3} = 2z$ کدام است؟

- (۱) $(2, 3, 1)$ (۲) $(\frac{2}{3}, -3, 1)$ (۳) $(\frac{2}{3}, -3, \frac{1}{2})$ (۴) $(2, 3, 2)$

۲- کدام یک از خطوط زیر عمود بر دو محور y و z است؟

- (۱) $\begin{cases} x=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} y=3 \\ z=4 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} y=3 \\ z=x \end{cases}$

۳- خط d از نقطه‌ی $A(-2, 1, 2)$ موازی نیمساز ناحیه اول صفحه‌ی xOy می‌گذرد. کدام نقطه روی خط d واقع است؟

- (۱) $(0, 2, 2)$ (۲) $(-1, 2, 1)$ (۳) $(1, 4, 2)$ (۴) $(2, 5, -2)$

۴- نقطه‌ی $A(a, b, 4)$ روی خط گذرنده بر دو نقطه‌ی $(1, -1, 0)$ و $(0, 1, 2)$ واقع است. دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

- (۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(1, -2)$ (۴) $(1, 3)$

۵- خطی که از مبدأ گذشته و با خط $(x=t+1, y=1-t, z=1-2t)$ موازی باشد، کدام است؟

- (۱) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} x=2t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-2t \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} x+y=0 \\ z+2x=0 \end{cases}$

۶- خط عمود بر دو بردار $v_1(1, 2, 3)$ و $v_2(3, 1, -1)$ و گذرنده از نقطه‌ی $A(4, -4, 1)$ صفحه‌ی xOy را در نقطه‌ی $M(a, b, c)$

قطع می‌کند. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 4

۷- خط عمود بر دو خط $x=2y=z$ و $x=y=2z-1$ و گذرنده بر نقطه‌ی $A(2, 1, 1)$ از کدام نقطه‌ی زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(1, 2, 2)$ (۲) $(2, 3, 2)$ (۳) $(3, 1, -1)$ (۴) $(0, 3, 3)$

۸- خط عمود بر محور y و بردار $v(3, 2, 2)$ و گذرنده بر مبدأ مختصات از کدام نقطه‌ی زیر نمی‌گذرد؟

- (۱) $(2, 0, 2)$ (۲) $(2, 0, -3)$ (۳) $(4, 0, -6)$ (۴) $(-2, 0, 3)$

۹- خطی که طول از مبدأ آن ۳ و عرض از مبدأ آن ۴ باشد، از کدام نقطه‌ی زیر نمی‌گذرد؟

- (۱) $(0, 4, 0)$ (۲) $(3, 0, 0)$ (۳) $(-3, 8, 0)$ (۴) $(4, 3, 0)$

۱۰- معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(3, 2, 1)$ می‌گذرد و عمود بر محور x است، کدام است؟

- (۱) $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} x=3 \\ y=2z \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} x=3 \\ y=z-1 \end{cases}$

پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- (A) ۱- گزینه‌ی ۲) معادلات پارامتری خط گذرا از نقطه‌ی $A=(3, 5, -1)$ و موازی با بردار $u=2i+3j+7k$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} x=2t+3 \\ y=3t+5 \\ z=7t-1 \end{cases}$$

- (B) ۲- گزینه‌ی ۳) فرض کنید L خط گذرا از نقطه‌ی $A=(0, 2, 5)$ و موازی با بردار $u=-2i+j-3k$ باشد. در این صورت $v=-2u=4i-2j+6k$ نیز یک بردار هادی L است. پس معادلات پارامتری خط L را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} x=4t \\ y=-2t+2 \\ z=6t+5 \end{cases}$$

- (A) ۳- گزینه‌ی ۱) چون نقطه‌ی A روی صفحه‌ی xOy قرار دارد، پس مختصات A به صورت $(x, y, 0)$ است و چون A روی d قرار دارد، پس به ازای عددی حقیقی مانند t ، $0=3t-6$ ، $y=-2t+1$ ، $x=t+3$. از معادله‌ی سوم نتیجه می‌گیریم $t=2$ و با جایگذاری آن در معادلات اول و دوم به دست می‌آوریم:

$$x=t+3=5, y=-2t+1=-3$$

پس $A=(5, -3, 0)$ ، لذا مجموع مختصات A برابر ۲ است.

- (B) ۴- گزینه‌ی ۱) روش اول: فرض کنید L خط گذرا از نقطه‌ی $A=(1, 1, 2)$ و موازی با بردار $u=i+3k$ باشد. در این صورت نقطه‌ی $B=(x, y, z)$ روی خط L قرار دارد اگر و فقط اگر به ازای عددی حقیقی مانند t داشته باشیم:

$$x=t+1, y=1, z=3t+2$$

$$x=3, y=1, z=8$$

به ازای $t=2$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} x=t+3 \\ y=1 \\ z=3t+8 \end{cases}$$

پس نقطه‌ی $B=(3, 1, 8)$ روی خط L قرار دارد، لذا معادلات پارامتری L را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

- روش دوم: کافی است در معادله‌ی اولیه، به جای مقدار t ، مقدار $t+2$ را قرار دهیم و به معادله‌ی موردنظر برسیم. با توجه به آن که t هر عدد حقیقی دلخواهی می‌تواند باشد، چنین تغییر متغیری مجاز است.

- (A) ۵- گزینه‌ی ۲) معادلات متقارن خط گذرا از نقطه‌ی $A=(2, 1, 4)$ و موازی با بردار $u=3i-j+2k$ عبارت است از:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{2}$$

- (A) ۶- گزینه‌ی ۴) معادلات متقارن خط گذرا از نقطه‌ی $A=(5, 0, 2)$ و موازی با بردار $u=2i-k$ عبارت است از:

$$y=0, \quad \frac{x-5}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

- (A) ۷- گزینه‌ی ۱) معادلات متقارن خط گذرا از نقطه‌ی $A=(3, 7, -1)$ و موازی با بردار $u=5j$ عبارت است از:

$$x=3, \quad z=-1$$

(A) ۸- گزینه‌ی ۲ فرض کنید L خط گذرا از نقاط $A=(2, -1, 3)$ و $B=(1, 4, 2)$ باشد، در این صورت $\overrightarrow{BA}=A-B=(1, -5, 1)$ یک بردار هادی برای خط L است. چون L از نقطه‌ی B می‌گذرد، پس معادلات متقارن خط L عبارت است از:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z-2}{1}$$

(B) ۹- گزینه‌ی ۲ فرض کنید L خط گذرا از نقاط $A=(2, 4, 5)$ و $B=(6, 4, -1)$ باشد، در این صورت $\overrightarrow{AB}=B-A=(4, 0, -6)$ یک بردار هادی برای خط L است. چون L از نقطه‌ی A می‌گذرد، پس معادلات متقارن خط L عبارت است از:

$$y=4, \quad \frac{x-2}{4} = \frac{z-5}{-6}$$

حال اگر C نقطه‌ی تقاطع L با صفحه‌ی yOz باشد، آن‌گاه $C=(0, y, z)$ و نقطه‌ی C باید در معادلات L صدق کند، لذا:

$$y=4, \quad \frac{0-2}{4} = \frac{z-5}{-6}$$

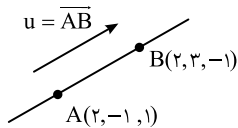
پس $y=4$ و $z=8$ ، لذا $C=(0, 4, 8)$ و مجموع مختصات C برابر ۱۲ است.

(B) ۱۰- گزینه‌ی ۱ چون خط از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد می‌توان بردار هادی را همان $\overrightarrow{AB}$ فرض کرد:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(3, -1, -2) \Rightarrow \text{معادله‌ی خط } d: \begin{cases} x=3t-1 \\ y=-t+2 \\ z=-2t+1 \end{cases} \xrightarrow{t=2} M=(5, 0, -3)$$

(B) ۱۱- گزینه‌ی ۲ چون خط از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد می‌توان بردار هادی را همان $\overrightarrow{AB}$ فرض کرد. داریم:

$$u = \overrightarrow{AB} = B - A = (0, 4, -2)$$



$$\text{معادله‌ی خط } d: \begin{cases} x=2 \\ y=4t-1 \\ z=-2t+1 \end{cases} \xrightarrow{z=0} t=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M=(2, 1, 0)$$

$$\sqrt{5} = \text{فاصله‌ی } M \text{ تا مبدأ مختصات}$$

(A) ۱۲- گزینه‌ی ۱ چون خط $x+2=\frac{y-4}{a}=\frac{z-b}{3}$ از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس نقطه‌ی $O=(0, 0, 0)$ باید در معادلات این خط صدق کند، لذا:

$$0+2=\frac{0-4}{a}=\frac{0-b}{3} \Rightarrow a=-2, b=-6 \Rightarrow a+b=-8$$

(B) ۱۳- گزینه‌ی ۳ اگر d محور x را قطع کند، آن‌گاه باید نقطه‌ای به صورت $(x, 0, 0)$ در معادلات d صدق کند، یعنی:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{0-3}{6} = \frac{0+1}{3}$$

ولی این معادلات به ازای هیچ مقداری از x برقرار نیستند. به روش مشابه می‌توان نتیجه گرفت که هیچ نقطه‌ای به صورت $(0, y, 0)$ نیز در معادلات d صدق نمی‌کند، پس d محور y را نیز قطع نمی‌کند. حال اگر d محور z را قطع کند، آن‌گاه باید نقطه‌ای به صورت $(0, 0, z)$ در معادلات d صدق کند، یعنی:

$$\frac{0-1}{2} = \frac{0-3}{6} = \frac{z+1}{3}$$

$z=-\frac{5}{2}$ در این معادلات صدق می‌کند، پس d محور z را در نقطه‌ی $(0, 0, -\frac{5}{2})$ قطع می‌کند.

(B) ۱۴- گزینه‌ی ۴ در صورتی دو خط بر هم عمودند که بردارهای هادی آن‌ها بر هم عمود باشند. بردار هادی خط $x=2y=3z$

برابر $u=(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ است. بردارهای هادی چهار خط داده شده به ترتیب عبارتند از:

$$u_1=(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}), u_2=(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1), u_3=(1, 2, -3), u_4=(1, 2, -6)$$

در بین این چهار بردار فقط u بر u_4 عمود است، زیرا $u \cdot u_4 = 0$ ولی هیچ‌یک از $u \cdot u_1, u \cdot u_2, u \cdot u_3$ برابر صفر نیستند.

(B) ۱۵- گزینه‌ی ۲ بردار هادی خط $z=5$, $\frac{x+1}{4}=y-2$ برابر $u=(4, 1, 0)$ است. چون $u \cdot z=(4, 1, 0) \cdot (0, 0, 1)=0$, پس u بر z

عمود است، لذا خط داده شده بر محور z عمود است.

تذکر: از نظر مفهومی، شرط $z=5$ نشان می‌دهد که خط داده شده موازی صفحه‌ی xy و عمود بر محور z است، زیرا تمام نقاط آن از ارتفاع ۵ برخوردارند و به یک فاصله‌ی مساوی از صفحه‌ی xy هستند.

(B) ۱۶- گزینه‌ی ۳ بردارهای هادی دو خط داده شده عبارتند از:

$$u_1=(0, 1, 3), u_2=(2, 5, 1)$$

چون $u_1 \times u_2$ بر u_1 و u_2 عمود است، پس هر خط موازی $u_1 \times u_2$ یک بردار هادی برای خط مطلوب است و داریم:

$$u_1 \times u_2=(-14, 6, -2)$$

پس $u=-\frac{1}{2}u_1 \times u_2=(7, -3, 1)$ نیز برداری هادی برای این خط است. حال معادلات متقارن خط گذرا از نقطه‌ی $A=(3, 1, 2)$ و موازی با بردار $u=(7, -3, 1)$ عبارت است از:

$$\frac{x-3}{7}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{1}$$

(C) ۱۷- گزینه‌ی ۱ چون A نقطه‌ای روی خط $x=y=z$ است، پس به ازای عددی حقیقی مانند t داریم $A=(t, t, t)$ و چون B

نقطه‌ای روی خط $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=z-2$ است، پس به ازای عددی حقیقی مانند s داریم $B=(2s, 3s-1, s+2)$. چون نقاط A و B

روی خط d قرار دارند و d با محور z موازی است، پس بردارهای $\overline{AB}$ و k موازی‌اند. داریم:

$$\overline{AB}=B-A=(2s-t, 3s-1-t, s+2-t)$$

حال از توازی $\overline{AB}$ و k نتیجه می‌گیریم:

$$2s-t=0, \quad 3s-1-t=0$$

از حل این دستگاه دو معادله و دو مجهول نتیجه می‌گیریم $s=1$ و $t=2$. در نتیجه $A=(2, 2, 2)$ و $B=(2, 2, 3)$. لذا طول پاره‌خط AB برابر ۱ است.

(C) ۱۸- گزینه‌ی ۳ چون نقطه‌ی B روی خط $y=2, z=1$ قرار دارد، پس به ازای عددی حقیقی مانند t داریم $B=(t, 2, 1)$ و چون

نقطه‌ی C روی خط $x=2, y=z+1$ قرار دارد، پس به ازای عددی حقیقی مانند s داریم $C=(2, s, s-1)$. حال نقاط A, B و C روی خط d قرار دارند، پس بردارهای $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ موازیند. داریم:

$$\overline{AB}=B-A=(t-1, 3, -1), \overline{AC}=C-A=(1, s+1, s-3) \xrightarrow{\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|}} \frac{t-1}{1}=\frac{3}{s+1}=\frac{-1}{s-3}$$

$$\text{از } \frac{3}{s+1}=\frac{-1}{s-3} \text{ نتیجه می‌گیریم } s=2 \text{ و از } \frac{t-1}{1}=\frac{3}{s+1} \text{ نتیجه می‌گیریم } t=2, \text{ پس } B=(2, 2, 1).$$

(C) ۱۹- گزینه‌ی ۳ معادلات پارامتری خط داده شده به صورت $x=2t, y=t-1, z=\frac{t}{4}$ است. چون نقطه‌ی A روی این خط قرار

دارد، پس به ازای عددی حقیقی مانند t داریم $A=(2t, t-1, \frac{t}{4})$. چون A از نقاط $(2, 3, 5)$ و $(0, -1, 3)$ به یک فاصله است، پس:

$$(2t-2)^2+((t-1)-3)^2+(\frac{t}{4}-5)^2=(2t-0)^2+((t-1)+1)^2+(\frac{t}{4}-3)^2$$

با حل این معادله نتیجه می‌گیریم $t=2$. لذا $A=(4, 1, 1)$ ، پس مجموع مختصات A برابر ۶ است.

(C) ۲۰- گزینه‌ی ۲ معادلات پارامتری خط داده شده به صورت $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t \\ z=-t-1 \end{cases}$ است. چون نقطه‌ی A روی این خط قرار دارد، پس

به ازای عددی حقیقی مانند t داریم $A=(3t-1, 2t, -t-1)$. فاصله‌ی A از محور x برابر $\sqrt{(2t)^2+(-t-1)^2}$ و فاصله‌ی A

از صفحه‌ی YOz برابر $|3t-1|$ است. اگر این دو فاصله برابر باشند، آن‌گاه $(3t-1)^2=(2t)^2+(-t-1)^2$ ، لذا $4t^2-8t=0$. پس $t=0$ یا $t=2$ ، لذا $A=(-1, 0, -1)$ یا $A=(5, 4, -3)$. پس عرض نقطه‌ی A برابر صفر یا ۴ است.

(C) ۲۱- گزینه‌ی ۱ خط مطلوب را L می‌نامیم. فرض کنید خط L خط $x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}$ را در نقطه‌ی $B = (t, 2t-1, 3t+1)$ قطع کند. چون L از نقاط A و B می‌گذرد، پس بردار $\overrightarrow{AB}$ یک بردار هادی برای خط L است و چون L بر u عمود است، پس $\overrightarrow{AB} \cdot u = 0$ نیز بر u عمود است و داریم:

$$\overrightarrow{AB} \cdot u = 0 \rightarrow 2(t-1) + (2t-2) - (3t-1) = 0$$

لذا $t=3$. پس بردار هادی خط L برابر $\overrightarrow{AB} = (2, 4, 8)$ است و چون L از نقطه‌ی $A = (1, 1, 2)$ می‌گذرد، پس معادلات خط L عبارت است از:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{8}$$

چنانچه هر سه عبارت فوق را در ۲ ضرب کنیم نتیجه می‌گیریم گزینه‌ی (۱) پاسخ سؤال است.

(B) ۲۲- گزینه‌ی ۲ چون خط مورد نظر عمود بر محور x و خط $x=y=z$ است، پس بردار هادی آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$u_1 = i = (1, 0, 0)$ و $u_2 = (1, 1, 1)$ بردار هادی محور Ox

$$u = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1)$$

$$\text{معادله‌ی خط: } \begin{cases} x=1 \\ y=-t+2 \\ z=t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y+z=1 \end{cases}$$

(C) ۲۳- گزینه‌ی ۴ چون خط مورد نظر موازی صفحه‌ی xy است، پس بر محور z عمود می‌باشد و داریم:

$k = u_1 = (0, 0, 1)$ بردار هادی محور z ها

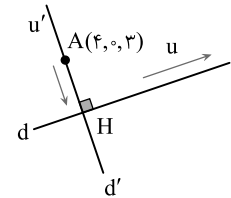
$3-x=2y-1=z$ بردار هادی خط $\Rightarrow u_2 = (-2, 1, 2)$

در ضمن چون خط مورد نظر بر محور z ها و خط $3-x=2y-1=z$ عمود است، داریم:

$$u = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1, -2, 0)$$

$$\text{معادله‌ی خط: } \begin{cases} x=-t+3 \\ y=-2t+4 \\ z=-5 \end{cases} \xrightarrow{x=0} t=3 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \\ z=-5 \end{cases} \Rightarrow M = (0, -2, -5)$$

(C) ۲۴- گزینه‌ی ۳ فرض کنید خط d' گذرنده از A خط d را در نقطه‌ی H قطع کند، داریم:



$$d: x-3 = \frac{y-1}{2} = z-2 = t \Rightarrow \begin{cases} x=t+3 \\ y=2t+1 \\ z=t+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \perp \vec{AH} \Rightarrow \vec{AH} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{AH} \cdot \vec{u} = (t_0-1, 2t_0+1, t_0+2) \cdot (1, 2, 1) = 0 \end{cases}$$

حال با توجه به این که d عمود بر d' است و با توجه به شکل داریم:

$$\vec{AH} \perp u \Rightarrow \vec{AH} \cdot u = 0 \Rightarrow (t_0-1, 2t_0+1, t_0+2) \cdot (1, 2, 1) = 0 \Rightarrow 6t_0 = 0 \Rightarrow t_0 = 0 \Rightarrow H(3, 1, 2)$$

$$d' \text{ بردار هادی خط } u' = \vec{AH} = (-1, 1, -1) \Rightarrow d' \text{ معادله‌ی خط } = \begin{cases} x=-t+4 \\ y=t+0 \\ z=-t+3 \end{cases}$$

$$xOz \text{ محل برخورد با صفحه‌ی } \xrightarrow{y=0} t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow M = (4, 0, 3)$$

پاسخ تشریحی خودآزمایی‌ها

خودآزمایی ۱

۱- گزینه‌ی ۳ (A)

$$\frac{3x+1}{2} = \frac{1-y}{3} = 2z = t \Rightarrow d: \begin{cases} x = \frac{2}{3}t - \frac{1}{3} \\ y = -3t + 1 \\ z = \frac{1}{2}t \end{cases} \Rightarrow \text{بردار هادی خط} = u\left(\frac{2}{3}, -3, \frac{1}{2}\right)$$

۲- گزینه‌ی ۳ (B) خط عمود بر محورهای Oy و Oz موازی محور x هاست. پس بردار هادی آن به صورت $u = i = (1, 0, 0)$ است. معادله‌ی کلی چنین خطوطی به صورت زیر خواهد بود:

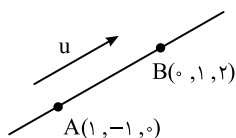
$$\text{معادله‌ی خط: } \begin{cases} x = t \\ y = a \\ z = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = a \\ z = b \end{cases}$$

۳- گزینه‌ی ۳ (C) چون خط موازی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است، پس بردار هادی آن به صورت $u(1, 1, 0)$ است:

$$\text{معادله‌ی خط: } \begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 1 \\ z = 2 \end{cases} \xrightarrow{t=3} M(1, 4, 2)$$

۴- گزینه‌ی ۱ (B) خط از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد، پس بردار $\overline{AB}$ می‌تواند بردار هادی خط باشد.

$$u = \overline{AB} = (-1, 2, 2)$$



$$\text{معادله‌ی خط} \begin{cases} x = -t + 0 \\ y = 2t + 1 \\ z = 2t + 2 \end{cases} \xrightarrow{z=4} t=1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 3$$

۵- گزینه‌ی ۴ (B) بردار هادی خط $d: (x=t+1, y=1-t, z=1-2t)$ برابر است با: $u(1, -1, -2)$.

$$\text{پس معادله‌ی خط گذرنده از مبدأ مختصات و موازی با خط d برابر است با: } d': \begin{cases} x = t + 0 \\ y = -t + 0 \\ z = -2t + 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z + 2x = 0 \end{cases}$$

این نحوه‌ی نمایش خط در ابتدا کمی عجیب به نظر می‌رسد ولی خیلی زود به آن عادت خواهید کرد!

۶- گزینه‌ی ۳ (C) خطی که بر دو بردار $v_1(1, 2, 3)$ و $v_2(3, 1, -1)$ عمود باشد با $v_1 \times v_2$ موازی است، پس بردار هادی آن برابر است با:

$$u = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-5, 10, -5), \quad \text{معادله‌ی خط} = d: \begin{cases} x = -5t + 4 \\ y = 10t - 4 \\ z = -5t + 1 \end{cases}$$

$$\text{محل برخورد خط با صفحه‌ی } xOy \xrightarrow{z=0} -5t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(3, -2, 0)$$

۷- گزینه‌ی ۴ (B)

$$x=2y=z=t \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=\frac{1}{2}t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \text{بردار هادی} = (1, \frac{1}{2}, 1) \xrightarrow{\times 2} u_1(2, 1, 2)$$

$$x=y=2z-1=t \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{بردار هادی} = (1, 1, \frac{1}{2}) \xrightarrow{\times 2} u_2(2, 2, 1)$$

بردار هادی خط موردنظر بر هر دو بردار u_1 و u_2 عمود است، پس:

$$\text{بردار هادی خط} = u = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 2, 2)$$

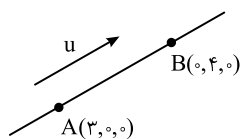
$$\text{خط معادله‌ی خط} = d: \begin{cases} x = -3t + 3 \\ y = 2t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases} \xrightarrow{t=1} M(0, 3, 3)$$

۸- گزینه‌ی ۱ (C) خط عمود بر محور y ها و بردار $v(3, 2, 2)$ موازی بردار $j \times v$ است، پس:

$$\text{بردار هادی خط} = u = j \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (2, 0, -3)$$

$$\text{خط معادله‌ی خط} = d: \begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{t=1} M_1(2, 0, -3) \\ \xrightarrow{t=2} M_2(4, 0, -6) \\ \xrightarrow{t=-1} M_3(-2, 0, 3) \end{cases}$$

فقط گزینه‌ی (۱) روی خط قرار ندارد.



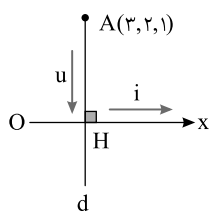
۹- گزینه‌ی ۴ (B) طول از مبدأ محل برخورد خط با محور x ها و عرض از مبدأ محل برخورد آن با محور y ها را نشان می‌دهد، پس:

$$\text{بردار هادی خط} = u = \overrightarrow{AB} = (-3, 4, 0)$$

$$\text{خط معادله‌ی خط} = d: \begin{cases} x = -3t + 3 \\ y = 4t \\ z = 0 \end{cases}$$

فقط گزینه (۴) روی خط قرار ندارد.

۱۰- گزینه‌ی ۳ (B) چون نقطه‌ی H روی محور x ها قرار دارد، پس مختصات آن به صورت $H(t, 0, 0)$ می‌باشد:



پاره‌خط AH عمود بر محور x هاست، در نتیجه:

$$\overrightarrow{AH} \cdot i = 0 \Rightarrow (t-3, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) = 0 \Rightarrow t=3 \Rightarrow H(3, 0, 0)$$

$$\text{بردار هادی خط} = u = \overrightarrow{AH} = (0, -2, -1) \Rightarrow \text{خط معادله‌ی خط} = \begin{cases} x=3 \\ y=-2t+2 \\ z=-t+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2z \end{cases}$$