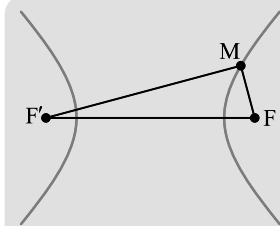


تعریف

هذلولی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت و متمایز (کانون‌ها) در آن صفحه مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را با $2a$ نمایش می‌دهند:

$$|MF| - |MF'| = 2a$$



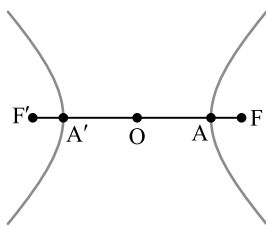
مقادیر و نقاط اصلی هذلولی

مرکز تقارن: نقطه‌ی O مرکز تقارن هذلولی وسط AA' و FF' قرار دارد.
رأس‌های هذلولی: دو نقطه‌ی A و A' را رأس‌های هذلولی می‌نامند و $|AA'| = 2a$ طول قطر هذلولی است.

کانون‌های هذلولی: دو نقطه‌ی F و F' را کانون‌های هذلولی می‌نامند و $|FF'| = 2c$ فاصله‌ی کانونی است.

رابطه‌ی طلایی هذلولی: در هذلولی به قطر $2a$ و فاصله‌ی کانونی $2c$ داریم:

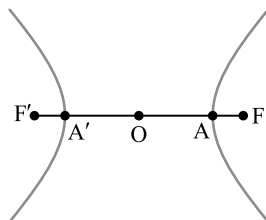
$$c^2 = a^2 + b^2$$



معادله‌ی استاندارد هذلولی

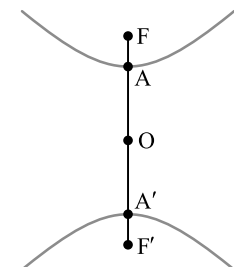
الف) هذلولی افقی: در این هذلولی محور کانونی موازی محور x هاست:

$$O(\alpha, \beta) \Rightarrow \text{معادله‌ی هذلولی افقی: } \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$



ب) هذلولی قائم: در این هذلولی محور کانونی موازی محور y هاست:

$$O(\alpha, \beta) \Rightarrow \text{معادله‌ی هذلولی قائم: } \frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$



تست ۱: معادله‌ی مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فاصله‌ی آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت $F'(-3, 1)$ و $F(3, 1)$ برابر ۴ باشد، کدام است؟

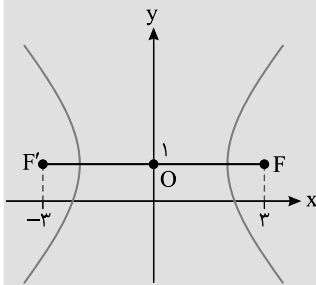
$$(2) \quad 5y^2 - 4x^2 - 8y = 24$$

$$(1) \quad 5x^2 - 4y^2 + 8y = 24$$

$$(4) \quad 5y^2 - 4x^2 - 2y = 15$$

$$(3) \quad 5x^2 - 4y^2 - 10x = 15$$

پاسخ: مکان هندسی موردنظر یک هذلولی و F و F' کانون‌های آن می‌باشند:



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مرکز تقارن: } O = \frac{F+F'}{2} = (0, 0) \\ \text{فاصله } |FF'| = 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \\ \text{رابطه } 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \\ \text{هذلولی افقی} \end{array} \right.$$

$$\text{رابطه ی طلایی هذلولی: } c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 5$$

$$\Rightarrow \text{معادله ی هذلولی: } \frac{(x-0)^2}{4} - \frac{(y-0)^2}{5} = 1 \Rightarrow 5x^2 - 4y^2 + 8y = 24$$

بنابراین گزینه ی (۱) درست است.

تست ۲: معادله ی هذلولی‌ای که مرکز آن به مختصات $O(-1, 0)$ و محور کانونی آن موازی محور y ها است و در آن $a=2$ و $b=3$ کدام است؟

$$(1) \quad 4y^2 - 9x^2 - 8y = 40 \quad (2) \quad 9y^2 - 4x^2 - 8x = 40 \quad (3) \quad 9x^2 - 4y^2 - 8x = 40 \quad (4) \quad 4x^2 - 9y^2 - 8x = 40$$

پاسخ: چون محور کانونی هذلولی موازی محور y ها است، پس هذلولی قائم است:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مرکز تقارن: } O(-1, 0) \\ a=2 \\ b=3 \\ \text{هذلولی قائم} \end{array} \right. \Rightarrow \text{معادله ی هذلولی: } \frac{(y-0)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1 \Rightarrow 9y^2 - 4x^2 - 8x = 40$$

بنابراین گزینه ی (۲) درست است.

معادله ی گسترده ی هذلولی

معادله ی گسترده ی هذلولی به صورت $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ است که در آن A و B مختلف‌العلامه اند ($AB < 0$). برای حل مسائل هذلولی معمولاً لازم است که این معادلات به صورت استاندارد نوشته شوند.

نکته: مختصات مرکز تقارن هذلولی در معادله ی گسترده به صورت زیر نیز محاسبه می‌شود:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \Rightarrow 2Ax + C = 0 \\ f'_y = 0 \Rightarrow 2By + D = 0 \end{cases} \Rightarrow O'(-\frac{C}{2A}, -\frac{D}{2B})$$

دقت کنید که برای تبدیل معادله ی گسترده به معادله ی استاندارد، لازم است عبارت به صورت تفاضل دو مربع کامل درآید.

تست ۳: در هذلولی $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y = 31$ ، اگر M نقطه‌ای واقع بر هذلولی و F و F' کانون‌های هذلولی باشند، حاصل

$$|MF| - |MF'| \text{ کدام است؟}$$

$$6 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

پاسخ:

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y = 31 \Rightarrow 9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 + 2y + 1) = 31 + 9 - 4$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow |MF| - |MF'| = 2a = 2 \times 2 = 4$$

بنابراین گزینه ی (۳) درست است.

تست ۴: در هذلولی به معادله $4y^2 - 5x^2 + 8y + 20x + 4 = 0$ ، مختصات یکی از کانون‌ها کدام است؟

- (۱) $(-2, -1)$ (۲) $(-1, -1)$ (۳) $(2, -1)$ (۴) $(2, 2)$

پاسخ:

$$4(y^2 + 2y + 1) - 5(x^2 - 4x + 4) = -4 + 4 - 20 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{5} = 1$$

$$\begin{cases} \text{مشخصات هذلولی:} \\ a=2 \\ b=\sqrt{5} \\ \text{هذلولی افقی} \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c=3$$

$$\text{مختصات دو کانون: } F(2+3, -1) = (5, -1), F'(2-3, -1) = (-1, -1)$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تعداد سؤالات: ۲۰

بخش چهارم: هذلولی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۳۱- معادله‌ی مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی $F(2, 1)$ و $F'(2, 7)$ برابر ۴ باشد، کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-4)^2}{5} = 1 \\ (2) \quad & \frac{(y-4)^2}{5} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1 \\ (3) \quad & \frac{(x-2)^2}{5} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1 \\ (4) \quad & \frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{5} = 1 \end{aligned}$$

۱۳۲- معادله‌ی هذلولی‌ای که نقاط $F(2, -2)$ و $F'(2, 4)$ کانون‌ها و نقطه‌ی $A(2, 2)$ یک رأس آن باشد، کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{(x-2)^2}{8} - (y-1)^2 = 1 \\ (2) \quad & (y-1)^2 - \frac{(x-2)^2}{8} = 1 \\ (3) \quad & (x-2)^2 - \frac{(y-1)^2}{8} = 1 \\ (4) \quad & \frac{(y-1)^2}{8} - (x-2)^2 = 1 \end{aligned}$$

۱۳۳- نقاط $F(3, 0)$ و $F'(-3, 0)$ کانون‌های یک هذلولی هستند و نقطه‌ی $M(2\sqrt{6}, 5)$ روی این هذلولی قرار دارد. معادله‌ی این هذلولی

کدام است؟

$$(1) \quad 5y^2 - 4x^2 = 29 \quad (2) \quad 4x^2 - 5y^2 = 40 \quad (3) \quad 5x^2 - 4y^2 = 20 \quad (4) \quad 5x^2 - 4y^2 = 1$$

۱۳۴- مختصات یکی از کانون‌های هذلولی $\frac{(x+1)^2}{13} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$ کدام است؟

- (۱) $(3, 2)$ (۲) $(1, 2)$ (۳) $(-1, -2)$ (۴) $(-1, 0)$

۱۳۵- نقطه‌ی $F(-2, 1)$ یکی از کانون‌های هذلولی $\frac{(x-3)^2}{m} - \frac{(y-n)^2}{19} = 1$ است. حاصل $m+n$ برابر کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۳۶- فرض کنید F یکی از کانون‌های هذلولی $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ و M نقطه‌ای روی این هذلولی باشد. حداقل فاصله‌ی M از F برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{16}{9}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) ۲

۱۳۷- کمترین فاصله نقطه‌ی $M(1, 2)$ از نقاط منحنی $\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۳۸- منحنی نمایش معادله‌ی $x^2 - y^2 - x + y = 0$ کدام است؟

- (۱) دو خط راست عمود بر هم (۲) دو خط راست موازی (۳) هذلولی (۴) بیضی

۱۳۹- به ازای کدام m ، m معادله‌ی یک هذلولی قائم است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴) ۱۷

۱۴۰- فرض کنید F و F' کانون‌های هذلولی $3y^2 - 4x^2 + 12y = 0$ باشند و $O(0, 0)$. قدرمطلق تفاضل فواصل O از F و F' برابر کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۴

۱۴۱- نقاط M و N هر یک روی یکی از شاخه‌های هذلولی $3x^2 + 6x - 4y^2 - 16y = 61$ قرار دارند. کمترین فاصله‌ی M و N از یک‌دیگر برابر کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۴۲- بیضی $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ بر کدام هذلولی مماس نیست؟

$$\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \quad (1) \quad \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \quad (2)$$

$$(x-1)^2 - (y-2)^2 = 4 \quad (3) \quad \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1 \quad (4)$$

۱۴۳- نقطه‌ی (m, n) روی منحنی $2x^2 - 4x - 3y^2 + 12y = 1$ قرار دارد. کدام نقطه قطعاً روی این منحنی قرار دارد؟

- (۱) $(m, 2-n)$ (۲) $(m, -4-n)$ (۳) $(2-m, n)$ (۴) $(-2-n, m)$

۱۴۴- معادله‌ی مکان هندسی مراکز دایره‌ی که از نقطه‌ی $F(4, 0)$ گذشته و بر دایره‌ی $x^2 + y^2 = 12$ مماس‌اند، کدام است؟

$$\frac{y^2}{3} - \frac{(x-4)^2}{13} = 1 \quad (1) \quad \frac{(x-4)^2}{13} - \frac{y^2}{3} = 1 \quad (2) \quad \frac{y^2}{13} - \frac{(x-4)^2}{3} = 1 \quad (3) \quad \frac{(x-4)^2}{3} - \frac{y^2}{13} = 1 \quad (4)$$

۱۴۵- فرض کنید $O(0, 0)$ مرکز یک هذلولی باشد و رئوس این هذلولی به ترتیب روی خطوط $y = x + 1$ و $y = 2x + 5$ قرار داشته باشند.

فاصله‌ی رئوس این هذلولی از یک‌دیگر برابر کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۱۴۶- هر یک از دو شاخه‌ی هذلولی $x^2 + ax - 4y^2 + 4 = 0$ محور y ها را در یک نقطه قطع می‌کنند. مجموعه‌ی مقادیر a به کدام صورت

(سراسری خارج از کشور - ۸۷)

است؟

- (۱) $|a| < 2$ (۲) $|a| < 4$ (۳) $|a| > 2$ (۴) $|a| > 4$

۱۴۷- خط $y = x - 1$ نمودار $4y^2 - 9x^2 + 18x + 16 = 0$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۴۸- فرض کنید $F(2, 5)$ و $F'(4, 3)$ کانون‌های یک هذلولی باشند. کدام خط یکی از محورهای تقارن این هذلولی است؟

- (۱) $y = x + 1$ (۲) $y = 2x - 2$ (۳) $2y - x = 5$ (۴) $3x - 2y = 1$

۱۴۹- فاصله‌ی هر نقطه از یک هذلولی از نقطه‌ی $F(2, 5)$ سه برابر فاصله‌اش از خط $y = 1$ است. مختصات مرکز این هذلولی کدام است؟

- (۱) $(2, 0)$ (۲) $(2, \frac{1}{2})$ (۳) $(2, 1)$ (۴) $(2, \frac{3}{2})$

۱۵۰- نقطه‌ی $A(2, 1)$ رأسی از یک هذلولی و خط $x + 4y = 23$ یکی از محورهای تقارن این هذلولی است. مختصات رأس دیگر این هذلولی

کدام است؟

- (۱) $(3, 5)$ (۲) $(4, 9)$ (۳) $(5, 13)$ (۴) $(6, 17)$

بخش چهارم: هذلولی

خودآزمایی ۵

- ۱- نقطه‌ی $F(۴, ۲)$ یکی از کانون‌های هذلولی $\frac{(x-۱)^2}{m} - \frac{(y-n)^2}{۵} = ۱$ است. حاصل $m+n$ برابر کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸
- ۲- اگر $F(۱, -۱)$ و $F'(۱, ۷)$ مختصات کانون و $M(۰, ۰)$ مختصات نقطه‌ای از هذلولی باشند، معادله‌ی هذلولی کدام است؟
 (۱) $(y-۳)^2 - (x-۱)^2 = ۸$ (۲) $(x-۱)^2 - (y-۳)^2 = ۸$
 (۳) $(y-۱)^2 - (x-۳)^2 = ۱۶$ (۴) $(x-۳)^2 - (y-۱)^2 = ۱۶$
- ۳- مختصات یکی از کانون‌های هذلولی $۹y^2 - ۴x^2 + ۸x = ۴۰$ کدام است؟
 (۱) $(-۱, -\sqrt{۱۳})$ (۲) $(-\sqrt{۱۳}, -۱)$ (۳) $(۱, \sqrt{۱۳})$ (۴) $(\sqrt{۱۳}, ۱)$
- ۴- پاره‌خط واصل دو کانون هذلولی $\frac{(x+۳)^2}{۹} - \frac{(y-۱)^2}{۴} = ۹$ هذلولی را در A و B قطع می‌کند. طول پاره‌خط AB کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۸
- ۵- به‌ازای هر نقطه از یک هذلولی مانند M ، فاصله‌ی M از نقطه‌ی $F(۰, ۳)$ دو برابر فاصله‌ی این نقطه از محور x ها است. فاصله‌ی بین کانون‌های این هذلولی برابر کدام است؟
 (۱) $۲\sqrt{۲}$ (۲) ۴ (۳) $۴\sqrt{۲}$ (۴) ۸
- ۶- نقطه‌ی M روی یک هذلولی طوری حرکت می‌کند که در لحظه‌ی t در نقطه‌ی $(۱ + \frac{۵}{\cos t}, -۳ + ۲\sqrt{۵} \tan t)$ قرار دارد. فاصله‌ی کانون‌های این هذلولی از یک‌دیگر برابر کدام است؟
 (۱) $۲\sqrt{۵}$ (۲) $۶\sqrt{۲}$ (۳) $۶\sqrt{۵}$ (۴) $۱۰\sqrt{۲}$
- ۷- فرض کنید خط $x=۸$ هذلولی $\frac{x^2}{۴} - \frac{y^2}{۵} = ۱$ را در نقطه‌ی M قطع کند. فاصله‌ی M از کانون نزدیک‌تر برابر کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۹
- ۸- بیضی $\frac{x^2}{۴} + \frac{y^2}{۹} = ۱$ و هذلولی $\frac{x^2}{۹} - \frac{y^2}{۴} = ۱$ چند نقطه‌ی مشترک دارند؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴
- ۹- به‌ازای کدام m خط $x=m$ بر هذلولی $x^2 + ۶x - ۳y^2 = ۰$ مماس است؟
 (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) صفر
- ۱۰- نقاط M و N هر یک روی یکی از شاخه‌های هذلولی $۳x^2 - ۴y^2 - ۱۲x + ۲۴y - ۳۶ = ۰$ قرار دارند. کم‌ترین فاصله‌ی M و N از یک‌دیگر برابر کدام است؟
 (۱) $۲\sqrt{۲}$ (۲) $۲\sqrt{۳}$ (۳) $۲\sqrt{۶}$ (۴) ۴

(A) ۱۳۱- گزینه‌ی ۴ چون نقاط $F(2, 7)$ و $F'(2, 1)$ روی یک خط قائم قرار دارند، پس هذلولی مورد نظر یک هذلولی قائم است.

نقطه‌ی $O = \frac{1}{2}(F + F') = (2, 4)$ مرکز هذلولی است، همچنین طبق فرض $2a = 4$ و $2c = |FF'| = 6$ ، پس $a = 2$ و $c = 3$ ، بنابراین

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5} \quad \text{در نتیجه معادله‌ی هذلولی به صورت} \quad \frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{5} = 1 \quad \text{است.}$$

(B) ۱۳۲- گزینه‌ی ۲ چون نقاط $F(2, -2)$ و $F'(2, 4)$ روی یک خط قائم قرار دارند، پس هذلولی مورد نظر یک هذلولی قائم است و

معادله‌ی آن به صورت $\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$ می‌باشد. مرکز هذلولی بر وسط پاره خط FF' منطبق است، بنابراین

$O(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(F + F') = (2, 1)$ همچنین $2c = |FF'| = 6$ و $a = |OA| = 1$ ، پس $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{8}$. در نتیجه معادله‌ی هذلولی

$$\text{به صورت} \quad \frac{(y-1)^2}{8} - \frac{(x-2)^2}{1} = 1 \quad \text{است.}$$

(B) ۱۳۳- گزینه‌ی ۳ چون نقاط $F(3, 0)$ و $F'(-3, 0)$ روی یک خط افقی قرار دارند، پس هذلولی مورد نظر یک هذلولی افقی است و

معادله‌ی آن به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ می‌باشد. مرکز هذلولی بر وسط پاره خط FF' منطبق است، بنابراین

$O(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(F + F') = (0, 0)$ همچنین $2c = |FF'| = 6$ ، پس $a^2 + b^2 = c^2 = 9$. چون نقطه‌ی $M(2\sqrt{6}, 5)$ روی هذلولی قرار دارد،

$$\text{پس} \quad \frac{(2\sqrt{6})^2}{a^2} - \frac{5^2}{b^2} = 1 \quad \text{با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ \frac{24}{a^2} - \frac{25}{b^2} = 1 \end{cases} \quad \text{نتیجه می‌گیریم} \quad a^2 = 4 \quad \text{و} \quad b^2 = 5. \quad \text{پس معادله‌ی}$$

$$\text{هذلولی به صورت} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \quad \text{است.}$$

(A) ۱۳۴- گزینه‌ی ۱ نقطه‌ی $O(-1, 2)$ مرکز هذلولی $\frac{(x+1)^2}{13} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$ است. این هذلولی یک هذلولی افقی است و در آن

$a^2 = 13$ و $b^2 = 3$ ، پس $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 4$. در نتیجه دو کانون هذلولی از حرکت افقی به سمت راست یا چپ رأس O به فاصله‌ی $c = 4$ واحد به دست می‌آیند، یعنی نقاط $F(-1+c, 2) = (3, 2)$ و $F'(-1-c, 2) = (-5, 2)$ کانون‌های این هذلولی هستند.

(B) ۱۳۵- گزینه‌ی ۳ هذلولی $\frac{(x-3)^2}{m} - \frac{(y-n)^2}{19} = 1$ یک هذلولی افقی است، نقطه‌ی $O(3, n)$ مرکز هذلولی است و در این هذلولی

$a^2 = m$ و $b^2 = 19$. چون هذلولی افقی است، پس نقاط $O(3, n)$ و $F(-2, 1)$ روی یک خط افقی قرار دارند، بنابراین $n = 1$. در این هذلولی $c = |OF| = 5$ ، پس:

$$m = a^2 = c^2 - b^2 = 25 - 19 = 6$$

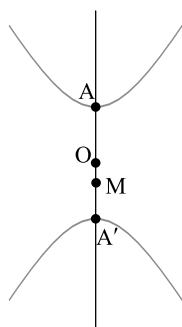
در نتیجه $m + n = 7$.

(A) ۱۳۶- گزینه‌ی ۴

فرض کنید F کانونی از یک هذلولی و M نقطه‌ای روی این هذلولی باشد. در این صورت حداقل فاصله‌ی M از F برابر $c - a$ است و این حداقل زمانی رخ می‌دهد که M بر رأس هذلولی منطبق باشد.

در هذلولی $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ، $a^2 = 9$ و $b^2 = 16$ ، پس $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$. با توجه به نکته‌ی فوق، حداقل فاصله‌ی M از F برابر

$$c - a = 2 \quad \text{است.}$$



(B) ۱۳۷- گزینه‌ی ۲ در هذلولی $\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$ نقطه‌ی $O(1, 3)$ مرکز است و

$a^2 = 16$. در ضمن، این هذلولی یک هذلولی قائم است، پس نقاط $A(1, 7)$ و $A'(1, -1)$ رأس‌های این هذلولی هستند. حال نقطه‌ی $M(1, 2)$ روی پاره‌خط AA' به فاصله‌ی ۵ از A و به فاصله‌ی ۳ از A' قرار دارد. پس نقطه‌ی A' نزدیک‌ترین نقطه‌ی هذلولی به نقطه‌ی M است و کم‌ترین فاصله‌ی M از نقاط هذلولی برابر ۳ است.

(B) ۱۳۸- گزینه‌ی ۱

$$x^2 - y^2 - x + y = 0 \Rightarrow (x^2 - x + \frac{1}{4}) - (y^2 - y + \frac{1}{4}) = 0$$

$$\Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \pm(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow \text{دو خط متعامد}$$

(B) ۱۳۹- گزینه‌ی ۱ معادله‌ی $3x^2 - 12x - 4y^2 + 20y = m$ را به صورت $3(x-2)^2 - 4(y-\frac{5}{2})^2 = m+12-25 = m-13$ بازنویسی

می‌کنیم. معادله‌ی یک هذلولی قائم به صورت $\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$ و معادل آن $a^2b^2 = a^2(y-\beta)^2 - a^2(x-\alpha)^2$ خواهد بود. پس در صورتی معادله‌ی مورد نظر، معادله‌ی یک هذلولی قائم است که ضریب جمله‌ی شامل y و عدد ثابت سمت راست هر دو، هم علامت باشند. یعنی $m-13 < 0$. در بین ۴ عدد داده‌شده، فقط $m=11$ در این نابرابری صدق می‌کند.

(B) ۱۴۰- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که نقطه‌ی $O(0, 0)$ در معادله‌ی $3y^2 - 4x^2 + 12y = 0$ صدق می‌کند، پس O روی این هذلولی قرار دارد، بنابراین قدر مطلق تفاضل فواصل O از F و F' برابر $2a$ است. برای محاسبه‌ی a باید معادله‌ی هذلولی را به صورت استاندارد درآوریم. معادله‌ی هذلولی را به صورت $3(y+2)^2 - 4x^2 = 12$ بازنویسی می‌کنیم، معادله‌ی استاندارد هذلولی به صورت

$$\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{x^2}{3} = 1 \text{ است، پس در این هذلولی } a^2 = 4 \text{ و } |OF| - |OF'| = 2a = 4.$$

(B) ۱۴۱- گزینه‌ی ۴ چنانچه نقاط M و N هر یک روی یکی از شاخه‌های یک هذلولی قرار داشته باشند، کم‌ترین فاصله‌ی بین M و N برابر $2a$ است. معادله‌ی

$$3x^2 + 6x - 4y^2 - 16y = 61 \text{ را به صورت } 3(x+1)^2 - 4(y+2)^2 = 48 \text{ بازنویسی می‌کنیم،}$$

$$\text{معادله‌ی استاندارد هذلولی به صورت } \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{12} = 1 \text{ است. در این هذلولی } a^2 = 16,$$

پس کم‌ترین فاصله‌ی بین M و N برابر $2a = 8$ است.

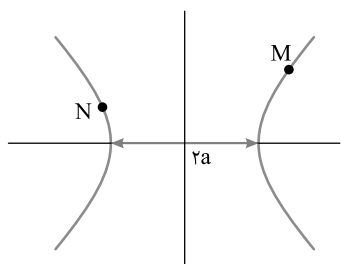
(C) ۱۴۲- گزینه‌ی ۲ نقطه‌ی $O(1, 2)$ مرکز بیضی و هذلولی‌های داده‌شده است. همچنین بیضی داده‌شده یک بیضی قائم است که طول

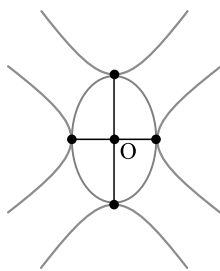
قطر کوچک آن برابر ۴ و طول قطر بزرگ آن برابر ۶ است. پس با توجه به شکل روبه‌رو، اگر در یک هذلولی افقی فاصله‌ی بین رئوس برابر ۴ یا در یک هذلولی قائم فاصله‌ی بین رئوس برابر ۶ باشد، آن‌گاه هذلولی بر بیضی مماس می‌شود. هذلولی

$$\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \text{ یک هذلولی قائم و فاصله‌ی بین رأس‌های آن برابر ۶ است. هذلولی } (x-1)^2 - (y-2)^2 = 4 \text{ یک هذلولی افقی}$$

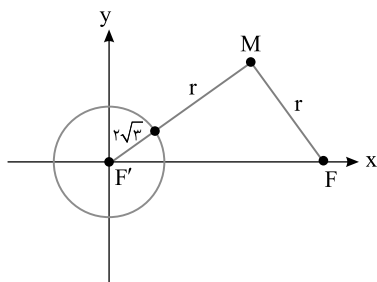
$$\text{و فاصله‌ی بین رأس‌های آن برابر ۴ است و هذلولی } \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1 \text{ نیز یک هذلولی افقی و فاصله‌ی بین رأس‌های آن برابر}$$

۴ است. پس این ۳ هذلولی بر بیضی داده‌شده مماس‌اند.





- (C) ۱۴۳- گزینهی ۳ معادلهی $2x^2 - 4x - 3y^2 + 12y = 1$ را به صورت $2(x-1)^2 - 3(y-2)^2 = -9$ بازنویسی می‌کنیم. نقطه‌ی $O(1, 2)$ مرکز و خطوط $x=1$ و $y=2$ محورهای تقارن این هذلولی هستند. حال اگر (m, n) نقطه‌ای روی هذلولی باشد، آن‌گاه قرینه‌ی این نقطه نسبت به مرکز و محورهای تقارن یعنی نقاط $(2-m, n)$ ، $(2-m, 4-n)$ و $(m, 4-n)$ نیز روی هذلولی قرار دارند.



- (D) ۱۴۴- گزینهی ۱ فرض کنید M مرکز دایره‌ای مانند C باشد که از نقطه‌ی $F(8, 0)$ گذشته و بر دایره‌ی $x^2 + y^2 = 12$ مماس است. نقطه‌ی $F'(0, 0)$ مرکز دایره‌ی $x^2 + y^2 = 12$ و شعاع این دایره برابر $r' = 2\sqrt{3}$ است. فرض کنید شعاع دایره‌ی C برابر r باشد، بنابراین $|MF| = r$. اگر C و دایره‌ی $x^2 + y^2 = 12$ مماس خارج باشند، آن‌گاه $|MF'| = r + r' = r + 2\sqrt{3}$ و بنابراین $|MF'| - |MF| = 2\sqrt{3}$ و اگر این دو دایره مماس داخل باشند، آن‌گاه $|MF'| - |MF| = 2\sqrt{3}$ پس $|MF'| = r - r' = r - 2\sqrt{3}$ از M بر روی هذلولی به کانون‌های F و F' قرار دارد که در آن $2a = 2\sqrt{3}$. چون نقاط F و F' روی یک خط افقی قرار دارند، پس این هذلولی یک هذلولی افقی است و معادله‌ی آن به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ است.

مرکز هذلولی بر وسط پاره‌خط FF' منطبق است، پس $O(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(F + F') = (4, 0)$. همچنین $2c = |FF'| = 8$ پس

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13} \quad \text{در نتیجه معادله‌ی هذلولی به صورت} \quad \frac{(x-4)^2}{3} - \frac{y^2}{13} = 1 \quad \text{است.}$$

- (C) ۱۴۵- گزینهی ۳ چون رئوس هذلولی روی خطوط $y = x + 1$ و $y = 3x + 5$ قرار دارند، پس اعداد حقیقی x_1 و x_2 وجود دارند که به‌ازای آن‌ها نقاط $A(x_1, x_1 + 1)$ و $A'(x_2, 3x_2 + 5)$ رئوس هذلولی هستند. چون نقطه‌ی O وسط پاره‌خط AA' است، پس $A + A' = 2O = (0, 0)$ ، بنابراین:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ (x_1 + 1) + (3x_2 + 5) = 0 \end{cases}$$

با حل این دستگاه معادلات نتیجه می‌گیریم $x_1 = 3$ و $x_2 = -3$ ، پس $A(3, 4)$ و $A'(-3, -4)$. در نتیجه $|AA'| = 10$.

- (B) ۱۴۶- گزینهی ۲

$$x^2 + ax - 4y^2 + 4 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - 4y^2 = -4 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{-4 + \frac{a^2}{4}} - \frac{y^2}{-4 + \frac{a^2}{4}} = 1$$

چون هر یک از دو شاخه‌ی هذلولی محور yها را در یک نقطه قطع می‌کنند، پس هذلولی قائم است و با توجه به معادله‌ی هذلولی قائم داریم:

$$-4 + \frac{a^2}{4} < 0 \Rightarrow -4 < a < 4 \Rightarrow |a| < 4$$

- (B) ۱۴۷- گزینهی ۳

$$4y^2 - 9x^2 + 18x + 16 = 0 \Rightarrow \frac{9(x-1)^2}{25} - \frac{4y^2}{25} = 1$$

برای تعیین نقطه‌ی تلاقی هذلولی و خط $y = x - 1$ به جای $x - 1$ در معادله‌ی هذلولی y را قرار داده و معادله را حل می‌کنیم:

$$y = x - 1 \quad \text{محل تقاطع با} \quad \frac{9y^2}{25} - \frac{4y^2}{25} = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{5} \Rightarrow A(1+\sqrt{5}, \sqrt{5}) \text{ و } B(1-\sqrt{5}, -\sqrt{5})$$

(B) ۱۴۸- گزینه‌ی ۱ یکی از محورهای تقارن هذلولی خط گذرا از F و F' و دیگری خط عمودمنصف پاره‌خط FF' است. معادله‌ی

خط گذرا از نقاط $F(2, 5)$ و $F'(4, 3)$ به صورت $F'(4, 3)$ یا به طور ساده‌تر به صورت $y = -x + 7$ است. چون ضریب

زاویه‌ی این خط برابر -1 است، پس ضریب زاویه‌ی خط عمودمنصف FF' برابر 1 است، هم‌چنین نقطه‌ی $O = \frac{1}{2}(F + F') = (3, 4)$

روی این عمودمنصف قرار دارد، پس معادله‌ی آن به صورت $y - 4 = x - 3$ یا به طور ساده‌تر به صورت $y = x + 1$ است. پس خطوط $y = x + 1$ و $y = -x + 7$ محورهای تقارن هذلولی هستند.

(B) ۱۴۹- گزینه‌ی ۲ روش اول: فرض کنید $M(x, y)$ نقطه‌ای از هذلولی باشد. در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی M از نقطه‌ی $F(2, 5)$

سه برابر فاصله‌ی آن از خط $y = 1$ است، بنابراین $\sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} = 3|y-1|$ پس $\sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} = 3|y-1|$ در نتیجه

$$(x-2)^2 - 8y^2 + 8y + 16 = 0 \quad \text{و} \quad (x-2)^2 - 8(y-\frac{1}{2})^2 = -18 \quad \text{پس نقطه‌ی} \quad O(2, \frac{1}{2}) \quad \text{مرکز این هذلولی است.}$$

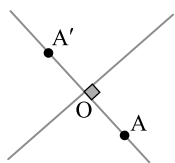
نکته: برای به دست آوردن مختصات مرکز هذلولی به معادله‌ی $F(x, y) = 0$ ، می‌توانید مانند مقاطع قبلی دستگاه شامل $F'_x = 0$ و $F'_y = 0$ را حل کنید.

روش دوم:

با توجه به نکته، در این جا داریم:

$$F(x, y) = (x-2)^2 - 8y^2 + 8y + 16$$

$$\left. \begin{aligned} F'_y = 0 &\Rightarrow -16y + 8 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ F'_x = 0 &\Rightarrow 2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow O(2, \frac{1}{2})$$



(B) ۱۵۰- گزینه‌ی ۲ چون نقطه‌ی $A(2, 1)$ روی خط $x + 4y = 23$ قرار ندارد، پس این خط محور غیر کانونی

هذلولی است. محور کانونی هذلولی از نقطه‌ی A می‌گذرد و بر محور غیر کانونی عمود است. ضریب زاویه‌ی

خط $x + 4y = 23$ برابر $-\frac{1}{4}$ است، پس معادله‌ی محور کانونی به صورت $y - 1 = 4(x - 2)$ یا به طور ساده‌تر

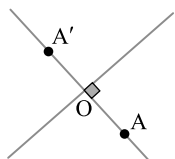
به صورت $y = 4x - 7$ است. می‌دانیم محل برخورد محورهای کانونی و غیر کانونی مرکز هذلولی است. از حل

دستگاه معادلات $\begin{cases} x + 4y = 23 \\ y = 4x - 7 \end{cases}$ نتیجه می‌گیریم نقطه‌ی $O(3, 5)$ مرکز هذلولی است. اگر رأس دیگر هذلولی

را A' بنامیم، آن گاه O وسط پاره‌خط AA' است، پس $A' = 2O - A = (4, 9)$.

(A) ۱۵۱- گزینه‌ی ۳ معادله‌ی $9y^2 - 4x^2 - 36y - 8x = 4$ را به صورت $9(y-2)^2 - 4(x+1)^2 = 36$ بازنویسی

می‌کنیم.



$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1 \Rightarrow y-2 = \pm \frac{2}{3}(x+1)$$

پس دو مجانب هذلولی $3y + 2x - 4 = 0$ و $3y - 2x - 8 = 0$ خواهند بود.

(B) ۱۵۲- گزینه‌ی ۱ اگر خطوط $y = 2x - 1$ و $y = mx + 11$ مجانب‌های یک هذلولی قائم باشند، چون شیب مجانب‌های هذلولی

قرینه‌ی یکدیگرند، پس $m = -2$. چون هر دو مجانب از مرکز هذلولی می‌گذرند، پس با حل دستگاه معادلات $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -2x + 11 \end{cases}$ نتیجه

می‌گیریم نقطه‌ی $O(3, 5)$ مرکز هذلولی می‌باشد و مجموع مختصات آن برابر 8 است.

(B) ۱۵۳- گزینه‌ی ۴ مجانب‌های این هذلولی دارای معادلات $\frac{x-m}{\sqrt{6}} \mp \frac{y+1}{\sqrt{n}} = 0$ هستند، یا معادل آن $y+1 = \mp \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{6}}(x-m)$ که

شیبی برابر $\mp \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{6}}$ دارند، و چون در هذلولی افقی ضریب زاویه‌ی خطوط مجانب برابر $\mp \frac{b}{a}$ است، بنابراین اگر خط $y = 2x - 7$ یکی

از مجانب‌های هذلولی باشد، آن گاه $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{6}} = 2$ ، پس $n = 24$. نقطه‌ی $O(m, -1)$ مرکز هذلولی است و چون مرکز هذلولی روی خطوط

مجانب قرار دارد، پس $-1 = 2m - 7$ و $m = 3$ ، بنابراین $m + n = 27$.