

پاسخ ۱) قسمت‌های (الف) و (ت) مجموعه نیستند. در مورد (ج) دقت کنید که ممکن است نوشتن اعضا بسیار مشکل باشد، ولی توصیف، کاملاً مشخص است. موارد (ب)، (پ)، (ث) و (ج) مجموعه هستند که اعضای آن‌ها به صورت زیر مشخص می‌شوند:

(ب) : $\{3, 5, 7, 11, 13\}$

(پ) : \emptyset

همه‌ی حیوانات کره‌ی زمین : (ث)

(ج) : $\{1, 2, 3, \dots\}$

پاسخ ۲) موارد (ب) و (ت) درست هستند.

پاسخ ۳) موارد (پ)، (ث) و (ج) درست هستند.

پاسخ ۴) داریم $E=G$ و $B=C=F$ ، $A=D=H$.

پاسخ ۵) الف $a=3$ و $b=7$ (ب) یا $(b=3, a=2)$ یا $(b=9, a=8)$ (پ) یا $(b=2, a=1)$ یا $(b=1, a=2)$.

پاسخ ۶) $A=C=D=F=\emptyset$ ، همچنین دقت کنید که $B=H=\{0\}$ و $E=\mathbb{R}$.

پاسخ ۷) موارد (ب)، (ت)، (ج) و (خ) متناهی هستند. برای مجموعه‌ی مورد (خ) دقت کنید که $I=\{2\}$.

$A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \Rightarrow |A|=7$

$B=\{-\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, -\frac{5}{6}\} \Rightarrow |B|=3$

$C=\{3, 5, 7\} \Rightarrow |C|=3$

$D=\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\} \Rightarrow |D|=13$

$E=\emptyset \Rightarrow |E|=0$

$F=\{6, 20, 42, \dots\} \Rightarrow |F| = \text{نامتناهی}$

$G=\{-24, -6, 0, 6, 24\} \Rightarrow |G|=5$

پاسخ ۹) الف) برای آن که کسر $\frac{7}{x-1}$ عددی صحیح باشد، باید صورت کسر بر مخرج آن بخش‌پذیر باشد. پس $x-1=\pm 1$ یا $x-1=\pm 7$.

بنابراین: $A=\{0, 2, 8, -6\}$

ب) اگر مجموعه‌ی مورد نظر را B بنامیم داریم: $B=\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{30}{x} \in \mathbb{N}\}$

پاسخ ۱۰) برای تعیین مجموعه‌ی A می‌دانیم $x = \frac{2n}{n} + \frac{24}{n} = 2 + \frac{24}{n}$. برای آن که این عدد، عددی طبیعی باشد باید $\frac{24}{n}$ عددی طبیعی باشد.

پس n مقسوم‌علیه ۲۴ است. بنابراین $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. با جای‌گذاری هر یک از این اعداد، مقدار متناظر برای x به‌دست می‌آید.

$A=\{3, 4, 5, 6, 8, 10, 14, 26\}$

در شرط مجموعه‌ی B ، $\frac{28}{x} \in \mathbb{N}$ به معنی این است که x مقسوم‌علیه ۲۸ است. چون $x \in A$ نتیجه می‌گیریم $x \in \{4, 14\}$ ، بنابراین: $B=\{2, 7\}$.

پاسخ (۱۱) الف) باید $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ ، پس: $A = \{1, -1\}$

ب) باید $x - 4$ مربع کامل باشد. چون مربع‌های کامل ۰، ۱، ۴، ۹ و هستند، داریم:

$$B = \{4, 5, 8, 13, \dots\} = \{n^2 + 4 \mid n \in \mathbb{W}\}$$

پ) برای $x > 2$ و $x < -2$ عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود. پس $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. با قرار دادن این مقادیر به جای x می‌توانیم شرط صحیح

$$\text{بودن } \sqrt{4 - x^2} \text{ را بررسی کنیم. داریم: } C = \{-2, 0, 2\}$$

ت) چون $x^3 + 3x^2 = x^2(x + 3)$ ، برای این که این عبارت مربع کامل باشد، باید $x + 3$ مربع کامل باشد. مانند قسمت (ب) داریم:

$$x \in \{-3, -2, 1, 6, \dots\} \xrightarrow[x < 100]{x \in \mathbb{N}} D = \{1, 6, 13, 22, 33, 46, 61, 78, 97\}$$

پاسخ (۱۲) الف) $A = \{20n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ب) $B = \{5n \mid n \in \mathbb{N}, 3 \leq n \leq 200\}$

پ) هر عضو مجموعه از عضو قبلی ۴ تا بیش تر است و باقی‌مانده‌ی تقسیم همه بر ۴ برابر ۲ است. بنابراین همه به شکل $4k + 2$ هستند. اگر قرار

$$C = \{4k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}, k \geq -1\}$$

ت) به جای ۱ قرار دهید $\frac{3}{4}$. در صورت کسرهای اعداد ۷ تا ۷ تا اضافه می‌شوند، پس به شکل $7k + 3$ هستند. در مخرج هم اعداد متوالی هستند. در

اولین کسر که $k = 0$ ، در مخرج عدد ۳ داریم، بنابراین:

$$D = \left\{ \frac{7 \times 0 + 3}{0 + 3}, \frac{7 \times 1 + 3}{1 + 3}, \frac{7 \times 2 + 3}{2 + 3}, \dots \right\} = \left\{ \frac{7k + 3}{k + 3} \mid k \in \mathbb{W} \right\}$$

پاسخ (۱۳)

$$\text{ب) } B = \{(-1)^{n+1}(n+1)^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{الف) } A = \{n^3 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{ت) } D = \left\{ \frac{n^2 - 1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\text{پ) } C = \left\{ \frac{n-1}{n^3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\text{ج) } F = \{n^2 + n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{ث) } E = \left\{ \frac{(-1)^n(n^3 + 1)}{5n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

پاسخ (۱۴)

$$\text{الف) } A = \{2^n \mid n \in \mathbb{W}\}$$

$$\text{ب) } B = \{3^n - 1 \mid n \in \mathbb{W}\}$$

$$\text{پ) } C = \{10^n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ت) هر کدام از اعضای مجموعه‌ی D ، حاصل تقسیم یکی از اعضای C بر عدد ۹ هستند. بنابراین:

$$D = \left\{ \frac{1}{9}(10^n - 1) \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 10 \right\}$$

ث) هر کدام از اعضای مجموعه‌ی E ، حاصل ضرب یکی از اعضای D در عدد ۲ هستند (به شرط آن که نامتناهی باشد). ولی فقط اعضای D در ۲ ضرب شده‌اند که تعداد زوجی رقم دارند. بنابراین:

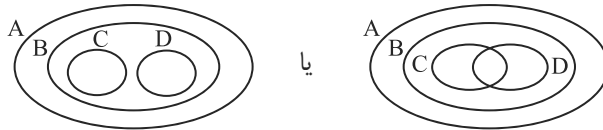
$$E = \left\{ \frac{2}{9}(10^{2k} - 1) \mid k \in \mathbb{N} \right\}$$

ج) دقت کنید که F به صورت $F = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{4}, \frac{9}{8}, \frac{16}{16}, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \dots \right\}$ قابل بازنویسی است. صورت کسرهای همه مربع کامل و مخرج کسرهای همه

توان‌های ۲ هستند بنابراین:

$$F = \left\{ \frac{n^2}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

- پاسخ (۱) الف) \subset ب) $\not\subset$ پ) $\not\subset$ ت) $\not\subset$ ث) \subset ج) \subset چ) \subset ح) $\not\subset$
- پاسخ (۲) الف) نادرست ب) درست پ) درست ت) درست ث) نادرست ج) نادرست چ) درست ح) درست
- پاسخ (۳) الف) \in یا \subset ب) \subset پ) \subset ت) \in ث) \in یا \subset
- پاسخ (۴) $\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ، همچنین $E \subset \mathbb{N}$ و $O \subset \mathbb{N}$ ولی $O \not\subset E$ و $E \not\subset O$.
- پاسخ (۵) الف) $B \subset A$. زیرا هر عدد مضرب ۶، مضرب ۳ نیز هست. یعنی هر عضو B عضوی از A نیز هست. ولی $A \not\subset B$ ، زیرا اعدادی مانند ۳ هستند که $3 \in A$ ولی $3 \notin B$.
- پاسخ (۶) الف) خیر. زیرا ۲ عدد اول است ولی فرد نیست. ب) بله
- پاسخ (۷) $C \subset B \subset A$
- پاسخ (۸) الف) D ب) C یا E یا F پ) B ت) B یا D
- پاسخ (۹) مجموعه‌ی مورد نظر برابر است با: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$
- پاسخ (۱۰)



- پاسخ (۱۱) الف) درست. از $A \subset B$ و $B \subset C$ نتیجه می‌گیریم $A \subset C$. بنابراین هر عضو A ، عضوی از C نیز هست یعنی اگر $a \in A$ ، آن‌گاه $a \in C$.
- ب) ممکن است درست یا نادرست باشد. به عنوان مثال اگر $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, c\}$ ، گزاره درست است و اگر $A = \{a\}$ و $B = \{a, b, c\}$ گزاره نادرست است.
- پ) ممکن است درست یا نادرست باشد.
- ت) ممکن است درست یا نادرست باشد.
- ث) درست است. از $A \subset B$ نتیجه می‌گیریم همه‌ی عضوهای A ، داخل B هستند. پس اگر B عضوی مانند e نداشته باشد، A هم آن را نخواهد داشت.
- ج) درست است.

- پاسخ (۱۲) الف) درست ب) نادرست
- پاسخ (۱۳) الف) 2^6 ب) $2^6 - 1$ پ) 2^5 ت) 2^5 ث) 2^4
- ج) زیرمجموعه‌هایی که مجموع اعضای آن‌ها برابر ۱۵ است را می‌نویسیم:

$\{4, 5, 6\}, \{1, 3, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- پاسخ (۱۴) الف) $2^{20} - 1, 2^{20}$ ب) 2^{17} پ) 2^9

ت) A باید زیرمجموعه‌ی $\{2, 4, 6, \dots, 20\}$ باشد و البته تهی نباشد! جواب: $2^{10} - 1$

ث) 2^{16} . مانند قسمت (ب) حل کنید. شرط $\{1, 5, 7, 9\} \subset X$ به معنی این است که حتماً اعداد ۱، ۵، ۷ و ۹ در X باشند!

ج) اگر عدد فرد مورد نظر ۱ باشد، بقیه‌ی اعضای زیرمجموعه باید از $\{2, 4, 6, 8, \dots, 20\}$ (مجموعه‌ای با ۱۰ عضو) انتخاب شوند. تعداد چنین

زیرمجموعه‌هایی 2^{10} است. از طرفی ما 10 عدد فرد داریم که هر کدام را می‌توانیم به عنوان تک عدد فرد مجموعه در نظر بگیریم. پس پاسخ سؤال 10×2^{10} می‌شود.

پاسخ (۱۵) الف) چون $A \subset A$ ، پس $A \in P(A)$. زیرا اعضای $P(A)$ همان زیرمجموعه‌های A هستند. بنابراین گزاره درست است.
ب) ممکن است درست یا نادرست باشد. مثلاً اگر $A = \{1\}$ ، نادرست است، ولی اگر $A = \{\emptyset\}$ ، آن‌گاه $A \subset P(A)$.
پ) نادرست است.
ت) درست است.

پاسخ (۱۶)

الف) $A = \emptyset \Rightarrow P(A) = \{\emptyset\}$

ب) $A = P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\} \Rightarrow P(A) = \{\{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \emptyset\}$

پ) $A = \{\{\{\emptyset\}\}\} \Rightarrow P(A) = \{\emptyset, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$

ت) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \Rightarrow P(A) = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}\}\}, \emptyset\}$

پاسخ (۱۷) $P(B)$ از زیرمجموعه‌های B تشکیل شده. چون $x, y \in B$ نتیجه می‌گیریم:

$\{x\} \subset B$, $\{x, y\} \subset B$

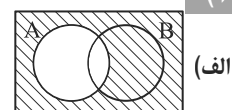
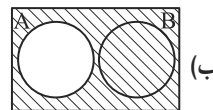
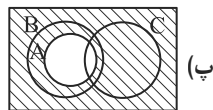
پس اگر $A = P(B)$ ، آن‌گاه $\{x\} \in A$ و $\{x, y\} \in A$ بنابراین:

$\{\{x\}, \{x, y\}\} \subset A \Rightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} \in P(A) \xrightarrow{A=P(B)} \{\{x\}, \{x, y\}\} \in P(P(B))$

پاسخ (۱۸) الف) مجموعه‌ی حروف بی‌صدا **ب)** مجموعه‌ی اعداد گنگ **پ)** $A' = \emptyset$
ت) $A = \{4, 7, 10, 13\} \Rightarrow A' = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15\}$

بنابراین A' ، 11 عضو دارد.

پاسخ (۱۹)



پاسخ (۲۰) به عنوان مثال می‌توانید فرض کنید $U = \{1, 2, \dots, 5\}$ ، $A = \{1, 2\}$ و $B = \{3\}$ و درستی رابطه‌ها را بررسی کنید.

برای اثبات از نمودار ون استفاده کنید.

پاسخ (۲۱) الف) برای پیدا کردن تعداد زیرمجموعه‌ها با شرایط X ، دقت کنید که هر زیرمجموعه‌ی U که زیرمجموعه‌ی A نباشد، می‌تواند به جای X قرار بگیرد. مجموعه‌ی U ، 2^9 زیرمجموعه دارد که 2^4 تای آن‌ها زیرمجموعه‌ی A نیز هستند. پس پاسخ سؤال $2^9 - 2^4 = 512 - 16 = 496$ مجموعه می‌شود.

ب) چون $C \subset B$ ، اگر $X \subset C$ داریم $X \subset B$. پس هیچ مجموعه‌ای با این شرایط پیدا نمی‌شود.

پ) $2^3 - 2 = 6$ مجموعه به جای X می‌توان قرار داد. به مسأله‌ی (۸) بخش آموزش مراجعه کنید.

ت) $2^7 - 2^2 = 124$ مجموعه به جای X می‌توان قرار داد. از نمودار ون و قسمت قبل کمک بگیرید.

ث) چون $C \subset B$ ، اگر $X \not\subset B$ ، خود به خود $X \not\subset C$ (زیرا اگر $X \subset C$ باشد، آن‌گاه $X \subset B$). پس فقط با شرط $X \not\subset B$ کار داریم که مانند قسمت الف) می‌توانیم مسأله را حل کنیم.

جواب: $2^9 - 2^7 = 384$ مجموعه!

پاسخ (۱)

الف) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

ب) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

پ) $\{3\}$

ت) $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3\} = \{1, 2, 3, 4\}$

ث) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

ج) $A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $B' = \{1, 2, 8, 9\} \Rightarrow A' \cup B' = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$

چ) $A \cap B = \{3, 4\} \Rightarrow (A \cap B)' = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$

ح) $\{2, 3, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{8, 9\}$

خ) $\{1, 2, 3, 4\} - \{1, 2, 8, 9\} = \{3, 4\}$

د) $A - B = \{1, 2\}$, $B - A = \{5, 6, 7\} \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 5, 6, 7\}$

ذ) $\{1, 2\} - \{2, 3, 8, 9\} = \{1\}$

ر) $\{5, 6, 7, 8, 9\} - (\{1, 2, 8, 9\} \cap \{2, 3, 8, 9\}) = \{5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 8, 9\} = \{5, 6, 7\}$

پاسخ (۲) الف) $A \cap \mathbb{Q} = \{-2, 0, \frac{3}{4}, 1, 3\}$

ب) برای به دست آوردن $|A \cap \mathbb{Z}|$ ، باید تعداد اعداد صحیح عضو مجموعه‌ی A را به دست آورید. در واقع:

$$A \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1, 2, -5\} \Rightarrow |A \cap \mathbb{Z}| = 5$$

به همین ترتیب داریم: $|A \cap \mathbb{Q}| = 7$ و $|A \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})| = 2$

پاسخ (۳) الف) فرض کنید $A \neq \emptyset$ اگر قرار دهیم $B = \emptyset$ و $C = A$ خواهیم داشت:

$$A \cup B = A \cup C = A$$

ولی $C \neq B$.

به عنوان مثالی دیگر می‌توان مجموعه‌های زیر را در نظر گرفت:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad , \quad B = \{1, 2, 3, 5, 6\} \quad , \quad C = \{5, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad , \quad A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

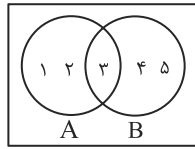
همان‌طور که مشاهده می‌کنید $A \cup B = A \cup C$ ولی $B \neq C$.

ب) فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$ و $C = \{1, 2, *, \square\}$ ، بنابراین داریم:

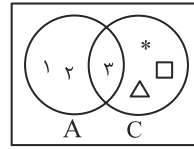
$$A \cap B = \{1, 2\} \quad , \quad A \cap C = \{1, 2\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید $A \cap C = A \cap B$ ولی $B \neq C$.

(پ)



$$A - B = \{1, 2\}$$



$$A - C = \{1, 2\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید $A - C = A - B$ ولی $B \neq C$.

پاسخ ۴) $|A \cup P(A)| = 5, |A \cap P(A)| = 1$

پاسخ ۵) الف) $A \cap B$ ۲ عضو دارد. $A \cup B$ ۸ عضو، $A - B$ ۲ عضو، $B - A$ ۴ عضو دارد.

ب) $A \cap B$ ۱ عضو دارد، $A \cup B$ ۵ عضو، $A - B$ ۲ عضو و $B - A$ ۲ عضو دارد.

پ) به وضوح $B \subset A$ ، پس: $A \cup B = A$ ، $A \cap B = B$ و $B - A = \emptyset$. با توجه به آن که اعضای A توان‌های طبیعی عدد ۳ و اعضای B

توان‌های زوج عدد ۳ هستند، نتیجه می‌گیریم: $A - B = \{3^1, 3^3, 3^5, 3^7, \dots\} = \{3^{2n-1} | n \in \mathbb{N}\}$

ت) می‌دانیم $A = \{2, 3, 4, \dots\}$ و $B = \{\dots, -1, 0, 1, 2\}$. بنابراین $A \cap B = \{2\}$ و $A \cup B = \mathbb{Z}$. همچنین داریم:

$$A - B = \{3, 4, \dots\} = \{x \in \mathbb{Z} | x > 2\}, B - A = \{x \in \mathbb{Z} | x < 2\}$$

ث) $A \cap B = \{2\}$ ، $A \cup B$: مجموعه‌ی اعداد طبیعی اول و زوج روی هم، $A - B$: مجموعه‌ی اعداد اول فرد، $B - A$: مجموعه‌ی اعداد زوج بزرگ‌تر

از ۲

ج) $A \cap B$: مجموعه‌ی دبیرانی که هر دو درس ریاضی ۱ و ۲ را تدریس می‌کنند.

$A \cup B$: مجموعه‌ی دبیرانی که درس ریاضی ۱ یا ریاضی ۲ تدریس می‌کنند.

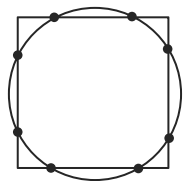
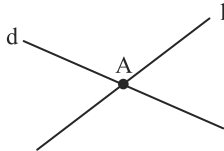
$A - B$: مجموعه‌ی دبیرانی که فقط درس ریاضی ۱ تدریس می‌کنند (از این دو درس).

$B - A$: مجموعه‌ی دبیرانی که فقط درس ریاضی ۲ تدریس می‌کنند (از این دو درس).

چ) چون $A \subset B$ ، داریم $A \cap B = A$ ، $A \cup B = B$ و $A - B = \emptyset$. $B - A$: مجموعه‌ی مردان مجرد ایرانی است.

پاسخ ۶) الف) اگر دو خط d و l در نقطه‌ی A متقاطع باشند، در این صورت $D \cap L = \{A\}$. اگر دو خط d و l بر هم منطبق باشند (یکی

باشند)، در این صورت $D \cap L = D = L$. اگر دو خط با هم موازی و غیر منطبق باشند، در این صورت: $D \cap L = \emptyset$



ب) چون در سؤال حداکثر تعداد نقاط مشترک خواسته شده است فرض می‌کنیم مربع و دایره به شکل زیر متقاطع باشند.

باید ببینیم که دایره و مربع حداکثر چند نقطه‌ی برخورد دارند. در شکل روبه‌رو وضعیت مورد نظر را نشان داده‌ایم. ۸ نقطه‌ی

اشتراک وجود دارد، بنابراین:

$$|S \cap C| = 8$$

پاسخ ۷) الف و ب) واضح است که $S_1 \subset \dots \subset S_7 \subset S_8 \subset S_9$ ، بنابراین: $S_1 \cap S_7 \cap \dots \cap S_9 = S_1$ و $S_1 \cup \dots \cup S_9 = S_9$

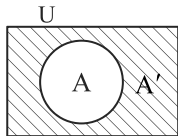
ب) $S_7 - S_9 = \{3, 4, 5, 6\}$

ت) $S_7 - S_8 = \emptyset$

ث) $A = (S_7 - S_8) \cup (S_7 - S_9)$

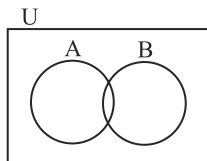
پاسخ ۸)

الف) با توجه به شکل مقابل، حاصل $A \cup A'$ برابر U است.

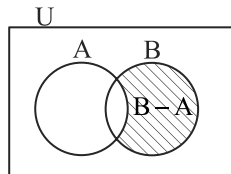


(ب) با توجه به شکل قسمت الف) حاصل $A \cap A'$ برابر \emptyset است.

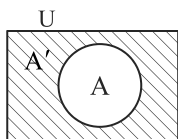
(پ) با توجه به شکل مقابل، همهی اعضای A درون $A \cup B$ هستند، پس می‌توان دریافت حاصل که $A - (A \cup B)$ برابر \emptyset است.



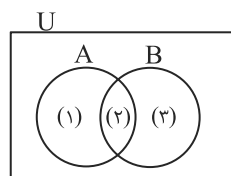
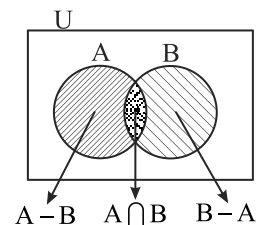
(ت) با توجه به شکل مقابل، حاصل $A \cup (B - A)$ برابر مجموعه‌ی $A \cup B$ است.



(ث) با توجه به شکل مقابل، حاصل $U - A'$ برابر A است.



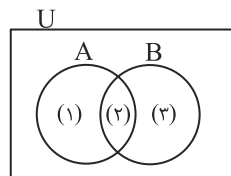
(ج) با توجه به شکل مقابل، حاصل $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ برابر $A \cup B$ است.



پاسخ ۹ الف) با توجه به نمودار مقابل، مجموعه‌ی A شامل قسمت‌های (۱) و (۲) و مجموعه‌ی $A \cap B$ شامل بخش (۲) است، پس مجموعه‌ی $A \cup (A \cap B)$ شامل قسمت‌های (۱) و (۲) است، پس:

$$A \cup (A \cap B) = A$$

(ب) با توجه به نمودار مقابل می‌توان نوشت:

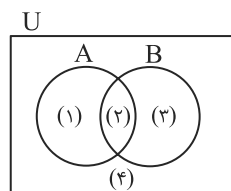


$$\begin{cases} A \cup B \text{ دارای } h = (1), (2), (3) \\ A \cap B \text{ دارای } h = (2) \end{cases} \Rightarrow (A \cup B) - (A \cap B) \text{ دارای } h = (1), (3)$$

$$\begin{cases} A - B \text{ دارای } h = (1) \\ B - A \text{ دارای } h = (3) \end{cases} \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) \text{ دارای } h = (1), (3)$$

پس تساوی $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$ همواره برقرار است.

(پ) با توجه به نمودار مقابل می‌توان گفت:



$$A \cup B \text{ دارای } h = (1), (2), (3) \Rightarrow (A \cup B)' \text{ دارای } h = (4)$$

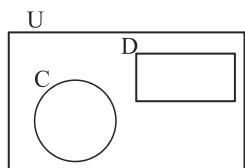
$$\begin{cases} A' \text{ دارای } h = (3), (4) \\ B' \text{ دارای } h = (1), (4) \end{cases} \Rightarrow A' \cap B' \text{ دارای } h = (4)$$

پس تساوی $(A \cup B)' = A' \cap B'$ همواره برقرار است.

(ت) اثبات این قسمت همانند قسمت (پ) است.

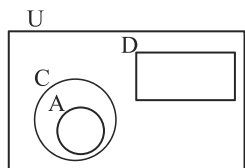
پاسخ ۱۰) بهتر است مرحله به مرحله نمودار مورد نظر را رسم کنیم. ابتدا، با توجه به این که $C \cap D = \emptyset$ نتیجه می‌گیریم ناحیه‌های C و D جدا

از هم هستند. پس به نمودار مقابل می‌رسیم:



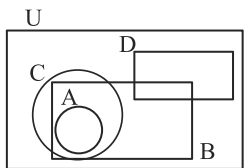
$$C \cap D = \emptyset$$

حال، از این که $A \subset C$ نتیجه می‌گیریم، ناحیه‌ی A داخل ناحیه‌ی C قرار دارد. پس نمودار ون به صورت زیر می‌شود:



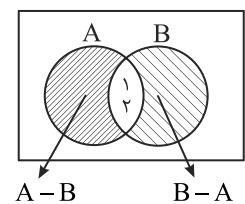
$$A \subset C$$

از $A \subset B$ نتیجه می‌گیریم، ناحیه‌ی B شامل ناحیه‌ی A می‌شود. چون درباره‌ی وضعیت B ، C و D نسبت به یک‌دیگر اطلاع خاصی نداریم، باید نمودار B را در حالت کلی رسم کنیم، طوری که هم ناحیه‌ی مشترک با D داشته باشد و هم ناحیه‌ی غیرمشترک. بنابراین نمودار کلی به صورت شکل مقابل حاصل می‌شود.



$$A \subset B$$

پاسخ ۱۱) با توجه به اطلاعات مسأله اعداد ۱ و ۲ در قسمت مشترک مجموعه‌های A و B قرار دارند، پس به نمودار مقابل می‌رسیم:



$$A-B \quad B-A$$

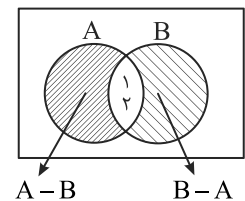
حال با توجه به این که تعداد اعضای باقی‌مانده برای مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ برابر ۴ عضو است و باید تعداد اعضای $A-B$ با تعداد اعضای $B-A$ برابر باشد نتیجه می‌گیریم که باید از اعداد $\{3, 4, 5, 6\}$ ، دو تا را در $A-B$ و دو تا را در $B-A$ قرار دهیم.

پس به حالت‌های زیر می‌رسیم:

مجموعه‌ی « $A-B$ »	مجموعه‌ی « $B-A$ »	
۳, ۴	۵, ۶	$\Rightarrow A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$
۳, ۵	۴, ۶	$\Rightarrow A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 6\}$
۳, ۶	۴, ۵	$\Rightarrow A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{1, 2, 4, 5\}$
۴, ۵	۳, ۶	$\Rightarrow A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$
۴, ۶	۳, ۵	$\Rightarrow A = \{1, 2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$
۵, ۶	۳, ۴	$\Rightarrow A = \{1, 2, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید ۶ حالت وجود دارد.

پاسخ ۱۲) همانند مسأله‌ی قبل به نمودار مقابل می‌رسیم:



$$A-B \quad B-A$$

با توجه به صورت مسأله، تعداد اعضای $B-A$ از تعداد اعضای $A-B$ بیش‌تر است، پس حالات زیر را داریم:

اعضای « $A-B$ »	اعضای « $B-A$ »	

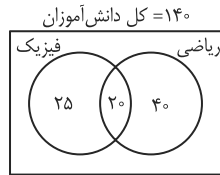
\emptyset	۳, ۴, ۵	$\Rightarrow A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
۳	۴, ۵	$\Rightarrow A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4, 5\}$
۴	۳, ۵	$\Rightarrow A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$
۵	۳, ۴	$\Rightarrow A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

همان طور که ملاحظه می کنید ۴ حالت وجود دارد.

۲-۴: اصل شمول و عم شمول

پاسخ تمرین‌های تشریحی

پاسخ (۱) با توجه به اطلاعات مسأله می‌توان نمودار ون روبه‌رو را رسم کرد:

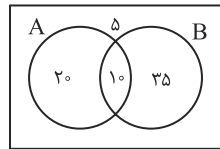


الف) با توجه به نمودار ون می‌توان دریافت تعداد دانش‌آموزانی که در هیچ درسی قبول نشده‌اند برابر است با:
 $140 - (25 + 20 + 40) = 55$

ب) $25 + 40 = 65$

پ) $25 + 20 + 40 = 85$

پاسخ (۲) همانند مسأله‌ی قبل، با توجه به اطلاعات داده‌شده می‌توان نمودار ون مقابل را رسم کرد:



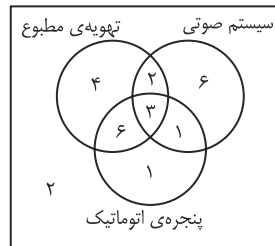
الف) $|A \cup B| = 20 + 10 + 35 = 65$

ب) $|A'| = 35 + 5 = 40$

پ) $|B'| = 20 + 5 = 25$

ت) $|A - B| = 20$

پاسخ (۳) با توجه به صورت مسأله می‌توان نمودار ون مقابل را رسم کرد. (توجه کنید که برای پر کردن نواحی از اشتراک سه مجموعه که برابر عدد ۳ است شروع کرده‌ایم سپس اشتراک دوتا دوتای مجموعه‌ها را پر کرده‌ایم و ...) حال با توجه به نمودار ون به سؤالات پاسخ می‌دهیم:



ب) ۱

الف) ۲

ت) $2 + 6 + 1 + 3 = 12$

پ) $2 + 6 + 1 = 9$

پاسخ (۴) برای پاسخ به هر یک از قسمت‌های این سؤال، ابتدا نمودار ون را با توجه به شرایط داده شده رسم می‌کنیم سپس مقدار مجهول را محاسبه می‌کنیم:

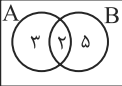
الف) $\Rightarrow |A \cup B| = 2 + 3 + 4 = 9$

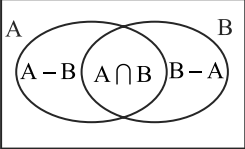
ب) $\Rightarrow |A'| = 3$

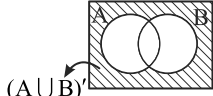
پ) $\Rightarrow |A - B| = 3$

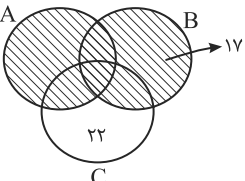
ت) $(|B| = |U| - |B'| = 15 - 3 = 12 \Rightarrow |B - A| = 5)$

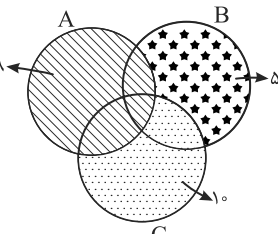
ث) $\Rightarrow |A \cup B| = 7 + 9 = 16$

ج)  $\Rightarrow |A \cup B| = ۳ + ۲ + ۵ = ۱۰$

ج)  $\Rightarrow |A \cap B| = |A \cup B| - (|A - B| + |B - A|) = ۲۴ - ۱۴ = ۱۰$

ج)  $\Rightarrow |U| = |A \cap B| + \underbrace{|A - B| + |B - A|}_{۱۷} + |(A \cup B)^c| \Rightarrow |A \cap B| + |(A \cup B)^c| = ۱۰۰ - ۱۷ = ۸۳$

ج)  $\Rightarrow |A \cup B \cup C| = ۱۷ + ۲۲ = ۳۹$

د)  $\Rightarrow |A \cup B \cup C| = ۸ + ۵ + ۱۰ = ۲۳$